Anfangsgründe
der
Rechenkunst
nebst
Vorübungen der Algebra.

F. C. Rouyer

Des
mathematischen Lehrbuchs
Ersten Theiles
Erstes Stück.

BIBLIOTHEK DES COLLEGIUMS IN AUGSBURG ST. ANNA

Zum Gebrauche des Königl. Joachimsthalischen Gymnasium.

Mit Königl. Preuß. Chursächs. u. Churbrand. allergnädigsten Freyheiten.

Berlin, 1778.
Bey Friederich Nicolai.
Buchhändler, auf der Stechbahn.

Bey der Verbindlichkeit, die Joachimsthalische Jugend in den Anfangsgründen der Mathematik zu unterrichten, fand ich zwar gleich im Anfange meiner Amtsführung Bücher genug, die auf einen ähnlichen Zweck abzielten, und unter diesen solche, denen ich, in Betrachtung ihres innerlichen Wehrtes für das Publikum, das meinige nicht an die Seite zu setzen wage; aber keines unter den mir bekannten schien mir den Einrichtungen unsers Gymnasiums, und den Bedürfnissen der darauf studierenden Jugend genugsam angemessen zu sein.

Ich sahe mich daher genöthiget, meinen Zuhörern die Hauptsätze in die Feder zu diktiren; ward aber je länger je mehr gewahr, daß dieses bei der übertriebenen Kürze, wozu es mich zwang, doch noch zu viel Zeit wegnahm; und hatte nicht selten den Verdruß, die geschriebenen Aufsätze unvollständig und fehlerhaft zu finden.

Nach einer funfzehn- oder noch wohl mehrjährigen Probe, bewog mich dieses mit Genehmigung meiner Obern, die bisherigen

Aufsätze etwas weiter auszuführen, und in den Druck zu geben, wie denn hiermit der Erste Theil derselben ans Licht tritt, dem der zweite und letzte, welchem noch einige Anwendungen der Mathematik bestimmt sind, wills Gott, nächstens folgen wird.

Fände diese Schrift mehrere Leser, als ihre eigentliche Bestimmung erwarten läßt: so ersuche dieselben zu bedenken, daß sie eigentlich nicht für angehende Mathematiker, sondern für eine solche Jugend entworfen ward, bei der die Mathematik ein Nebenwerk ist; daher dieselbe weder gar zu tief in die Geheimnisse derselben eingeführt, noch in einer ihr gar zu fremden Sprache unterhalten werden durfte; doch aber für eine studierende Jugend, welches, nach meiner Meinung, nicht blos praktische Regeln zuließ, sondern auch, so viel möglich, Gründe und Beweise erforderte.

Berlin,
den 14ten Jänner
1778.

F. C. Royer.

Ein=

Einleitung
in die
Rechenkunst.

§. 1.

Die Rechenkunst (Arithmetik) lehret Zahlen finden, deren Größe durch gewisse Bedingungen bestimmt ist. Sie setzt die Kunst zu zählen voraus.

§. 2.

Wir zählen die Dinge (mit weniger bekannten Ausnahme) einfach, zehnfach und hundertfach.

Zehn Hunderte nennen wir tausend; und zählen die Tausende wie die einzelnen Dinge einfach, zehnfach und hundertfach.

Tausend Tausende nennen wir eine **Million**, eine Million Millionen eine **Billion**, eine Million Billionen eine **Trillion** u. s. f. und zählen diese alle, wie die einzelnen Dinge ein- zehn- hundert- tausend- zehntausend- und hunderttausend-fach.

§. 3.

Die Zeichen, womit bestimmte Zahlen geschrieben werden, nennen wir Ziffern. Sie sind

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, unter denen die neun ersten die Zahlen eins bis neun ausdrücken, die letzte aber keinen eignen Werth hat, und die Nulle genannt wird.

§. 4.

Eine Ziffer behält blos ihren einfachen Wehrt, so lange sie entweder ganz allein, oder in einer zusammengesetzten Zahl ganz zur Rechten steht.

Z. B. Die 7, wenn sie allein, oder auch so 137 vorkommt, zeiget blos sieben einzelne Dinge (Einheiten) an.

§. 5.

Steht aber derselben zur Rechten eine Nulle oder andere Ziffer, so zeigt sie Zehende an: stehen zwo Ziffern dahinter, Hunderte; stehen ihrer drei dahinter, Tausende. Kurz: so oft eine Ziffer um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt wird, so oft wird ihr Werth zehnfach vergrößert.

Z. B. Die 5 in den Zahlen 50 oder 351 bedeutet 5 Zehende oder funfzig; in dieser 530 fünfhundert; in dieser 15204 fünftausend u. s. f.

§. 6.

Jede Ziffer hat demnach außer ihrem eignen Wehrte noch einen andern von der Stelle, die sie in einer Zahl einnimmt, nach welchem sie ein Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. wird,

Man kann diese Wehrte aus der folgenden Tafel ersehen, auch dieselbe nach §. 2. leicht weiter fortsetzen.

15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	Stellen
u. s. f.	Zehner	Einer	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Wehrte
Der Billionen.			Der Millionen.						Der einzelnen.						

§. 7.

Auf diese Regeln gründet sich die Kunst alle mit Ziffern geschriebene Zahlen zu lesen, und alle mit Worten abgefaßte Zahlen durch Ziffern zu schreiben, welches man das **Numeriren** nennet.

§. 8.

Soll man nämlich eine mit Ziffern geschriebene Zahl lesen: so spricht man von der Linken an jede Ziffer nach dem Werthe ihrer Stelle aus. Wobei gleichwol jede Sprache, nach der ihr eigenen Art zu zählen, einige Ausnahme erfordert.

Z. B. In der Zahl 15092 muß die 1 auf der fünften Stelle 10 tausend, die 5 auf der vierten 5 tausend, die 9 auf der zweiten 9 Zehende oder neunzig, und die 2 am Ende blos einfach gelten. Daher gilt die Zahl zehen und fünf tausend, neunzig und zwei, oder nach unserer Art zu zählen: funfzehn tausend zwey und neunzig. Die Zahl 430 807 aber: vierhundert und dreyßig tausend, acht hundert und sieben.

So bald man sechs Ziffern fertig aussprechen kann, ist es leicht, auch die größten Zahlen auszusprechen, besonders, wenn dieselben so geschrieben sind, daß nach sechs und sechs Ziffern, von der Rechten an gezählet, etwas Raum, oder ir-

gend ein anderes Zeichen befindlich ist; weil die vor den sechs letzten vorhergehenden Ziffern eben so gelesen werden, als wenn sie allein stånden; nur daß ihr Werth als Millionen, Billionen und dergleichen dazu gesetzt werden muß. (§. 6.)

Z. B. 72381 604359 wird gelesen 72381 Millionen, 604359.

§. 9.

Soll man hingegen eine in Worten gegebene Zahl mit Ziffern schreiben: so drückt man jeden Theil derselben durch eine Ziffer besonders aus, und giebt jeder Ziffer die ihr (nach §. 6.) gebührende Stelle in der Zahl; die ledigbleibenden Stellen aber füllet man mit Nullen aus.

Wenn man z. B. zweihundert und achttausend siebenhundert und drei schreiben sollte: so erfordern die zweihunderttausend eine 2 auf der sechsten, die achttausend eine 8 auf der vierten, die siebenhundert eine 7 auf der dritten, und die drei eine 3 auf der ersten Stelle vom Ende. Die fünfte Stelle und die zweite, welche ledig bleiben würden, besetzt man mit Nullen, damit man alle Stellen unterscheiden könne. So wird die Zahl 208703.

So bald man sechs Ziffern zu orduen weiß, ist es leicht auch größere Zahlen zu schreiben, weil die Millionen, Billionen, u. s. f. jede für sich eben so gezählet und geschrieben werden, wie die Einzelnen.

Z. B. 8 Billionen, 206 tausend und 74 Millionen 659 tausend und 31 werden so geschrieben:

8 206074 659031.

Erste Abtheilung
der
Rechenkunst,
welche
die sogenannten vier Species enthält.

I. Berechnung unbenannter ganzer Zahlen.

§. 10.

Die erste Rechnungsart ist diejenige, wodurch man eine Zahl findet, welche so groß ist als mehrere gegebene zusammengenommen. Diese wird die Zusammenzählung (Addition), die dabei gesuchte Zahl aber die Summe der gegebenen genannt.

§. 11.

Die Zusammenzählung geschieht auf folgende Art: Man schreibt die Zahlen so untereinander, daß die Einer, Zehner, Hunderter u. s. f. aller Zahlen in einer Reihe von oben herunter stehen.

Wenn z. B. 250, 6378, 12186, 2092, 130164 zusammengezählt werden sollen: so schreibt man sie folgendergestalt hin:

```
   250
  6378
 12186
  2092
130164
------
151070
```

Alsdann zählt man die Ziffern einer jeden Reihe zusammen, wobei man von den Einern anfängt, und allgemach gegen die Linke fortfährt. So bald man aber die Summe einer Reihe gefunden hat, so überlegt man, wie viel Zehende darin sein. Diese behält man zur folgenden Reihe auf, und setzt nur das, was darüber bleibt, gerade herunter in die Summe.

In dem beigefügten Falle machen die Einer zusammen 20 aus. Diese zwei Zehende nimt man als 2 zu der folgenden Reihe; unter die Einer aber setzt man eine 0, weil über die zwanzig nichts vorhanden ist.

In den folgenden Reihen werden die Ziffern eben wie die Einer behandelt, weil ihr Wehrt, als Zehner, Hunderter u. dergl., schon durch ihre Stelle bestimmt wird.

Die Ziffern der zweiten Reihe machen 35, und nebst den 2 aufbehaltenen 37 aus, wovon die 7 heruntergesetzt und die 3 zur folgenden Stelle behalten wird.

Wenn man alle Reihen zusammen gezähl hat: so ist die Zahl, welche man unter dieselben geschrieben hat, (hier die 151070) die Summe der gegebenen Zahlen.

§. 12.

Die zweite Rechnungsart ist diejenige, wodurch man erforschet, um wie viel eine von zwoen gegebenen Zahlen größer sei, als die andere. Sie wird die Abzählung (Subtraction) genannt. Die gesuchte Zahl heißt der Unterschied der gegebenen, imgleichen der Rest, weil sie diejenige ist,

ist, welche übrig bleibt, wenn man die kleinere Zahl von der grösseren wegnimmt.

§. 13.

Die Rechnung wird folgendermaaßen verrichtet: Man schreibt die kleinere Zahl unter die grössere hin, wie beim Zusammenzählen.

Sollen z. B. 10972671 von 56439063 abgezählet werden, so schreibt man sie so:

$$\begin{array}{r} 56439063 \\ \underline{10972671} \\ 45466392 \end{array}$$

Alsdenn fängt man bei den Einern an zu untersuchen, wie viel übrig bleibe, wenn man die untere Ziffer von der oberen wegnimmt, und setzt den Rest gerade herunter.

Hier läßt 1 von 3 weggenommen 2 übrig.

Eben so verfährt man nach und nach auch in den folgenden Stellen, betrachtet aber auch hier die Ziffern als Einer, weil ihr besonderer Werth durch die Stelle bestimmt wird.

Ist aber die untere Ziffer größer als die obere, so entlehnt man oben von der folgenden Stelle eins und zählt es als zehen zu der Ziffer, wovon man abzählen sollte; alsdenn kann man die untere davon wegnehmen. Auf der folgenden Stelle muß man aber alsdenn wohl bemerken, daß man schon eins davon entlehnt hat, daher man 1 mehr, als sonst geschehen würde, davon abzählt.

Auf der zweiten Stelle sollen hier 7 von 6 weggenommen werden. Man entlehnet daher 1 von der dritten Stelle, und zählt es als 10 zu der 6, wodurch

man 16 erhält, von denen 7 weggenommen 9 übrig lassen. Auf der dritten Stelle soll man nun 6 und mit dem entlehnten 1 zusammen 7 von 0 abziehen. Man verfährt also wie vohin, und erhält 3 zum Rest.

Wenn man mit allen Ziffern fertig ist, so ist die darunter geschriebene Zahl (4,466392) der gesuchte Unterschied oder Rest.

§. 14.

Wenn man den gefundenen Unterschied wieder mit der kleinern Zahl Zusammenzählt: so muß die größere herauskommen. Und wenn man von der Summe etlicher Zahlen die Zahlen selbst nach und nach abzählt: so muß nichts übrig bleiben. Das erstere kann demnach zur Probe der Abzählung, das zweite zur Probe der Zusammenzählung dienen.

§. 15.

Die dritte Rechnungsart ist diejenige, wodurch eine Zahl etliche mal so groß gemacht wird. Diese heiß die Vervielfältigung (Multiplication). Es wird also hierzu eine Zahl gegeben, welche etliche mal so groß gemacht werden soll, und eine andere welche anzeigt, wie vielfach dieses geschehen solle. Beide werden die zu vervielfältigende Zahlen (Factoren), die letztere aber insbesonde der Vervielfältiger genannt. Die Zahl, welche man durch diese Rechnung sucht, heißt das Vielfache (Product).

§. 16.

Die ganze Rechnung beruhet darauf, daß man das Vielfache jeder zwoer einzelnen Ziffer wisse,

wisse, welche Vielfache in dem diesem § angehängten so genannten Einmaleins enthalten sind. Man sucht nämlich die eine Ziffer in der obersten Reihe, und die andere in der ersten Reihe linker Hand. Alsdenn fährt man in der Abtheilung, wo jene steht, gerade herunter, bis auf die Abtheilung, wo die andere voran steht. In dem Viereck welches zu beiden Abtheilungen gehört, findet man das Vielfache der Ziffern. So sieht man z. B. daß 5 mal 7 zum Vielfachen 35 geben.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 17.

Soll nun eine gegebene Zahl durch eine einzelne Ziffer vervielfältiget werden: so vervielfältiget man mit dieser eine jede Ziffer jener Zahl insbesondere von der Rechten gegen die Linke, und schreibt das Vielfache gerade herunter, doch so, daß man, wie beym zusammenzählen, die Zehner zur folgenden Stelle aufbehält.

In beistehendem Exempel sollen 70145689 mit 7 vervielfältiget werden:

$$\begin{array}{r} 70145689 \\ 7 \\ \hline 491019823 \end{array}$$

Man sagt also: 7 mal 9 sind 63, d. i. 3 einzelne, welche herunter gesetzt, und 6 zehende, welche aufbehalten werden. Hierauf 7 mal 8 sind 56 und nebst den 6 aufbehaltenen 62, wovon die 2 herunter gesetzt, und die 6 wieder aufbehalten werden. Wenn man so fortfährt: so erhält man endlich das ganze Vielfache.

491019823

Auch hier betrachtet man alle Ziffern als Einer, weil ihr übriger Werth durch die Stellen bestimmt wird.

§. 18.

Besteht aber der Vervielfältiger ebenfalls aus mehreren Ziffern, so schreibt man denselben unter die andere Zahl, wie in den vorhergehenden Rechnungsarten.

Alsdenn vervielfältiget man die gegebene Zahl mit der letzten Ziffer des Vervielfältigers, wie vorhin. Eben so macht man es hernach mit der nächst folgenden Ziffer, und nach und nach einer jeden der übrigen, wenn der Vervielfältiger ihrer mehrere hat. Das Vielfache schreibt man, jederzeit unter das vorige, doch so, daß man es immer um eine Stelle weiter gegen die Linke setzt, weil jede folgende Ziffer des Vervielfältigers zehenmal so viel gilt, als wenn sie in der verhergehenden Stelle stände, und also ein zehenmal so großes Vielfaches geben muß. Endlich zählt man alle Vielfache zusammen; ihre Summe ist das gesuchte Vielfache.

Man wird diese Regeln leicht selbst auf die folgenden Exempel anwenden können, wo 19263 mit 523, und 25469 mit 8006 vervielfältiget werden.

```
 19263            25469
   523             8006
 -----         --------
 57789           152814
38526          203752
96315          ---------
--------       203904814
10074549
```

§. 19.

Wenn die eine von beiden Zahlen, oder auch alle beide Nullen am Ende haben: so läßt man sie bei der Vervielfältigung weg, und setzt sie alle erst zuletzt hinter das Vielfache; denn sie dienen blos, um die andern Ziffern vorzurücken.

Wenn 320 mit 1500 vervielfältiget werden sollen, so vervielfältiget man 32 mit 15, woraus 480 enstehen, welcher Zahl man die drei Nullen beider Zahlen anhängt:

```
   320
  1500
  ----
   160
  32
------
480000
```

§. 20.

Es ist einerlei, welche von beiden Zahlen man als den Vervielfältiger betrachtet. Denn wenn man z. B. 3 mal 4 Punkte untereinander geschrieben hat {· · · · / · · · · / · · · ·} so hat man seitwärts 4 mal 3 Punkte geschrieben. Man nimmt inzwischen gemeiniglich, der Bequemlichkeit halben, diejenige

Zahl

Zahl zum Vervielfältiger, welche die wenigsten Ziffern hat.

§. 21.

Wenn der Vervielfältiger selbst schon ein Vielfaches zwoer Zahlen ist, so darf man die vorgegebene nur zuerst durch die eine von diesen, und deren Vielfaches durch die andere vervielfältigen, um das verlangte Vielfache zu erhalten.

Wenn man z. B. 17 mit 24 vervielfältigen soll, welche (24) ein Vielfaches der 3 mit 8 sind, so darf man nur 17 mit 3, und die herauskommenden 51 mit 8 vervielfältigen, wodurch 408 entstehen. Das 3 fache 8 mal genommen, ist das 24 fache.

§. 22.

Die vierte Rechnungsart ist diejenige, wodurch man eine Zahl etliche mal so klein macht, oder welches einerlei ist, sie in etliche gleiche Theile theilet. Diese heißt die Theilung (Division). Die Zahl, welche in gleiche Theile getheilet werden soll, wird die zu theilende Zahl; die, welche die Zahl der Theile bestimmt, der Theiler; und die, welche man durch diese Rechnung findet, der Antheil (Quotient) genannt.

§. 23.

Die Rechnung beruhet darauf, daß man zu erforschen wisse, wie vielmal der Theiler in der zu theilenden Zahl enthalten sei, d. i. wie oft er sich davon wegnehmen lasse. Denn so oft dieses angeht, so oft erhält jeder Theil eins.

§. 24.

§. 24.

Um aber dieses zu lernen, übe man sich zuerst in denen Fällen, wo die eine Zahl noch nicht zehenmal in der andern enthalten ist, daß man zunächst merke, wie vielmal sie es sei; welches man, wenn der Theiler eine einzelne Ziffer ist, aus dem Einmaleins wissen kann.

Wäre z. B. der Theiler 6 und die zu theilende Zahl 27, so würde man merken, daß erstere in der andern zunächst 4 mal enthalten sind, weil 4 mal 6 zum Vielfachen 24 geben, welche sich von 27 wegnehmen lassen, da 5 mal 6 schon 30 ausmachen und eine grössere Zahl als 27 zu theilen erfordern würden.

§. 25.

Wenn aber die zu theilende Zahl nicht aus Einzelnen, sondern Hunderten, Tausenden oder dergleichen besteht, so merkt man auf eben dieselbe Art, im ersten Falle, wie viel hundert, im zweiten, wie viel tausendmal der Theiler in derselben enthalten sei. Kurz: die Ziffer des Antheils bleibt dabei eben dieselbe, ihr besonderer Werth aber richtet sich nach dem Werthe der zu theilenden Zahl.

Wären die 27 (im vorigen §) 27000, so sähe man, daß die 6 darin 4000 mal enthalten wären.

§. 26.

Bestehn beide Zahlen aus mehrern Ziffern, so übt man sich nur darin, daß man von beiden die erste, oder die erstern Ziffern mit einander vergleiche; weil man daraus ungefähr merken kann, wie oft auch der ganze Theiler in der vorgenommenen Zahl enthalten sei.

Sollten z. B. 967 mit 392 getheilt werden, so vergleicht man 3 mit 9, oder sicherer 39, d. i. ungefähr

fähr 40 mit 96, oder 4 mit 9; da man denn leicht sieht, daß eine 2 in dem Antheil kommen muß, welche ein Einer, Zehner oder dergleichen sein wird, je nachdem die 967 Einer, Zehner oder dergleichen sind.

§. 27.

Ist die zu theilende Zahl aus Millionen, Tausenden, Hunderten u. s. f. zusammengesetzt, so erforscht man auf die beschriebene Art, wie vielmal der Theiler in jedem dieser ihrer Theile, d. i. wie viel Millionen, wie viel tausend u. s. f. mahl er in der zu theilenden Zahl enthalten sei.

§. 28.

Der leichteste Fall ist der, wenn der Theiler eine einzelne Ziffer ist. Man schreibt denselben vor die zutheilende Zahl, und zieht hinter diese einen Strich.

Alsdenn vergleicht man den Theiler mit der ersten oder, wo nöthig, den zwo ersten Ziffern derselben, und setzt die gefundene Ziffer des Antheils hinter den Strich. Um ihren Werth als Zehner, Hunderter, oder dergleichen hat man sich nicht zu bekümmern, weil derselbe, wenn man vorschriftmäßig verfährt, durch die nachfolgenden Ziffern bestimmt wird.

Exempel 4) 225216|56304

```
        20
       ----
        25
        24
       ----
         12
         12
        ----
          16
          16
```

Hier

Hier vergleicht man 4 mit 22, und setzt die dadurch gefundene 5 hinter den Strich. Man vervielfältiget nunmehr die 5 mit 4, setzt das vielfache 20 unter die 22, zählt es davon ab, und setzt den Rest 2 gerade herunter. Zu diesen 2, welche noch nicht getheilt sind, und welche auf der nächstfolgenden Stelle 20 gelten, (§. 5.) nimt man die folgende 5 der zu theilenden Zahl, mit welcher sie also 25 ausmachen. Mit diesen vergleicht man den Theiler von neuen, schreibt die daraus entstehende 6 neben die 5 in den Antheil, und verfährt mit dieser, wie vorhin mit der 5. Auf welche Art man überhaupt fortfährt. Nämlich:

Man vervielfältiget jederzeit die gefundene Ziffer des Antheiles mit dem Theiler, zählt das Vielfache von der vorgenommenen Zahl ab, und setzt den Rest herunter. Zu diesem nimt man die folgende Ziffer der zu theilenden Zahl, und setzt die Theilung fort, bis von derselben keine Ziffer mehr übrig ist.

Wenn man bei Vergleichung des Theilers mit der vorgenommenen Zahl findet, daß derselbe gar nicht darin enthalten ist, so nimt man noch eine Ziffer der zu theilenden Zahl dazu. In den Antheil aber setzt man vorher eine 0, damit jede Ziffer desselben die ihr gebührende Stelle erhalte.

In der 4ten Theilung ist z. B. der Theiler 4 in 1 gar nicht enthalten. Man nimt deswegen noch die folgende 6 dazu, wodurch man 16 erhält. In den Antheil aber setzt man vorher eine 0, weil sonst die ersteren Ziffern desselben nur 5630, werden würden, da sie nach dem Werthe der 225200, woraus sie entstanden sind, 56300 werden müssen. (§. 25.)

Wer erst einige Uebung hierin hat, wird in diesem Falle, da der Theiler eine einzelne Ziffer ist, nicht nöthig haben die Vielfache und die Reste allezeit auszu-

schrei-

schreiben, wozu das folgende Beispiel auch ohne fernere Regeln Anleitung geben kann.

```
7) 84036|12005
   ‾‾‾‾‾
      1|
```

§. 29.

Eben auf die Weise verfährt man auch, wenn der Theiler mehrere Ziffern hat. Nur daß man gleich Anfangs so viele Ziffern von der zu theilenden Zahl vornimt, als man nöthig hat, um den Theiler ein oder etlichemahl darin enthalten zu sehen, und hiermit die erste Ziffer des Antheiles zu finden.

```
589) 1914826|3250
     1767
     ────
      1478
      1178
      ────
       3002
       2945
       ────
        576
```

Hier z. B. vergleicht man 589 mit 1914 oder 5 mit 19 (§. 26.), da man denn sieht das eine 3 in den Antheil gehört. Hernach vervielfältiget man 3 mit 589, zählt das vielfache 1767 von 1914 ab, und setzt den Rest 147 herunter; zu welchem man die folgende 8 nimt, und von neuem 589 mit 1478 vergleicht, u. s. f. wie §. 28.

§. 30.

Wenn man bei Vergleichung des Theilers mit der zu theilenden Zahl irgendwo gefehlt, und die Ziffer in dem Antheil entweder zu groß, oder zu klein genommen hat: so kann man den Irthum

da-

dadurch gleich entdecken, daß in dem erstern Falle das Vielfache des Theilers größer wird, als die Zahl, wovon man es abzählen soll; in dem zweiten aber nach geschehener Abzählung der Rest eben so groß oder größer wird, als der Theiler. Man kann also in beiden Fällen den Fehler leicht verbessern.

§. 31.

Wenn der Theiler Nullen am Ende hat, so werden sie vor der Theilung abgeschnitten, und eben so viele Ziffern von der zu theilenden Zahl. Der Antheil bleibt hierbei eben derselbe; die abgeschnittenen Ziffern aber sind solche, welche ohnedem übrig bleiben würden.

Exempel 63|00) 4789|45|76
441
―――
379
378
―――
145

§. 32.

Wenn nach vollendeter Theilung von der zu theilenden Zahl nichts übrig bleibt: so hat man den Antheil völlig gefunden. Bleibt aber etwas: so hat man eigentlich eine Zahl getheilt, welche um diesen Rest kleiner ist, als die vorgegebene; und man müßte also, um den völligen Antheil zu haben, diesen Rest noch besonders theilen, wovon unten (§. 40.) gehandelt wird.

§. 33.

Es ist aus der Natur der Theilung klar, daß der Theiler mit dem Antheile vervielfältiget, die

getheilte Zahl wieder hervorbringen muß; daher denn, wenn ein Rest geblieben ist, derselbe dem gedachten Vielfachen zugezählt werden muß, wenn die zu theilen vorgegebene Zahl wieder entstehen soll. Diese Verrichtung kann also zur **Probe der Theilung** dienen.

§. 34.

Daraus erhellet auch, daß eine Zahl (z. B. 36.), die ein Vielfaches zwoer andern (4 und 9) ist, sich durch eine jede von ihnen vollkommen theilen lassen, und durch die eine getheilt, die andere zum Antheil geben muß. Dieses kann eine Probe der Vervielfältigung abgeben.

§. 35.

Endlich: wenn der Theiler ein Vielfaches zwoer Zahlen ist, so kann man die vorgegebene Zahl zuerst durch die eine von ihnen, den Antheil aber durch die andere theilen, um den verlangten Antheil zu erhalten.

Wenn eine Zahl durch 24 d. i. durch 4 mahl 6 getheilt werden soll, so kann man sie durch 4, und den Antheil durch 6 Theilen. Der 6te Theil des 4ten Theils ist der 24te Theil.

II. Berechnung der Brüche.

§. 36.

Durch einen Bruch versteht man den Ausdruck, wodurch einer oder etliche Theile angezeigt werden, welche entstehen, wenn man das Ganze wovon die Rede ist, in lauter gleiche Theile theilet.

Z. B.

z. B. Die Ausdrücke ein Achttheil, zwei Drittheil sind Brüche.

Die übrigen Zahlen werden im Gegensatz der Brüche ganze Zahlen genennt.

§. 37.

Zu einem Bruche gehören daher zwo Zahlen: der Nenner, welcher anzeigt, was für Theile man habe, oder in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt werden solle; uud der Zähler woraus man sieht, wie viele derselben vorhanden sein.

z. B. In dem Bruche fünf Sechstheil zeigt der Nenner sechs, daß das Ganze in sechs gleiche Theile getheilt werden soll; der Zähler fünf aber, daß solcher Theile fünf vorhanden sind.

§. 38.

Um einen Bruch mit Ziffern auszudrücken, setzt man den Nenner unter den Zähler, und zieht einen Strich dazwischen. Woraus denn zugleich erhellet, wie die mit Ziffern geschriebene Brüche zu verstehen und zu lesen sein.

Man schreibt z. B. drei Viertheil: $\frac{3}{4}$, und lieset $\frac{7}{9}$: sieben Neuntheil.

§. 39.

In der Theilung ist der Antheil jederzeit einem Bruche gleich, dessen Zähler die zu theilende Zahl, und dessen Nenner der Theiler ist.

Da z. B. jedes Ganze in 6 glciche Theile getheilt, $\frac{1}{6}$ für jeden Antheilt abwirft: so müssen, wenn mehrere Ganze zu theilen sind, auch eben so viele Sechstheile für jeden ausfallen; $\frac{5}{6}$, wenn 5, $\frac{12}{6}$ wenn 12 Ganze in 6 gleiche Theile zu theilen sind.

§. 40.

Wenn die zu theilende Zahl kleiner ist als der Theiler, so muß man sich damit begnügen den Antheil durch einen solchen Bruch auszudrücken.

Daher man denn auch, wenn nach vollendeter Theilung ein Rest bleibt, zu der gefundenen ganzen Zahl des Antheils noch einen Bruch zu setzen hat, dessen Zähler dieser Rest, und dessen Nenner der Theiler ist.

Z. B. Der Antheil von 2 mit 3 getheilt, oder der Dritte Theil zweier Ganzen ist $\frac{2}{3}$. Und der völlige Antheil von 27 mit 4 getheilt ist 6 Ganze und $\frac{3}{4}$, welches man schreibt: $6\frac{3}{4}$.

§. 41.

Da von dem Zähler eines Bruches die Menge der vorhandenen Theile abhängt: so muß bei etlichemahliger Vergrößerung oder Verkleinerung des Zählers der Bruch selbst eben dieselbe Veränderung zugleich mit erleiden.

§. 42.

Da hingegen auf dem Nenner die Zahl derer Theile, die aus dem Ganzen gemacht werden sollen, beruhet: so muß bei etlichemaliger Vergrößerung des Nenners jeder Theil, und der Bruch selbst eben so viel mahl verkleinert, bei etlichemaliger Verkleinerung des Nenners aber jeder Theil und Bruch selbst eben so viel mahl vergrößert werden.

§. 43.

Wenn man den Zähler und den Nenner beide gleich viel mahl vergrößert oder verkleinert, d. i.

sie

sie durch eine Zahl entweder vervielfältiget oder theilt: so muß daher die Größe des Bruches eben dieselbe bleiben, weil eines das andere ersetzt.

§. 44.

Die Theilung des Zählers und Nenners mit einer Zahl hat, wenn beide Theilungen ohne Rest geschehen, den Nutzen, daß der Bruch dadurch auf kleinere Zahlen gebracht wird, welches man die **Abkürzung** (Aufhebung) desselben nennet.

§. 45.

Ob sich aber ein vorgegebener Bruch abkürzen lasse, d. i. ob es Zahlen gebe, wodurch sich Zähler und Nenner ohne Rest theilen lassen, kann durch Errathen und Versuchen mehrentheils gnugsam entschieden werden. Oft wird man auch finden, daß sich diese Verrichtung mehreremahl nach einander wiederholen läßt.

Exempel:

$$\begin{array}{c|c|c} & 10 & 6 \\ 120 & 12 & 2 \\ \hline 180 & 18 & 3 \end{array}$$

Bei Erblickung des Bruches $\frac{120}{180}$ merkt man z. B. daß sich beide Zahlen mit 10 theilen und auf $\frac{12}{18}$ bringen lassen; welcher Bruch sich durch 6 in $\frac{2}{3}$ verwandeln läßt. So wird man finden, daß der Bruch $\frac{288}{512}$ auf $\frac{9}{16}$, und $\frac{1728}{3888}$ auf $\frac{4}{9}$ gebracht werden kann.

§. 46.

Durch Vervielfältigung des Zählers und des Nenners mit einer Zahl aber gelangt man in den Stand, einem Bruche eine jede Zahl zum Nenner zu geben, welche ein Vielfaches seines

Nenners ist, d. i. welche sich durch denselben theilen läßt. (§. 34.) Denn wenn man den Zähler mit dem Antheile solcher Theilung vervielfältiget, so giebt das Vielfache den Zähler ab, der sich zu dem neuen Nenner schickt.

Man kann z. B. dem Bruche $\frac{3}{4}$ den Nenner 20 geben, welche 20 sich mit dem Nenner 4 theilen läßt, und 5 zum Antheil giebte. Denn wenn man Zähler und Nenner mit dieser 5 vervielfältiget: so entstehen $\frac{15}{20}$ welche den $\frac{3}{4}$ gleich sind (§. 43).

§. 47.

So muß man mehreren Brüchen einen gemeinen Nenner geben können, wenn man eine Zahl zu finden weiß, die sich durch einen jeden von den Nennern derselben theilen läßt.

§. 48.

Eine solche findet man sicherlich, wenn man alle Nenner der gegebenen Brüche mit einander vervielfältiget; d. i. wenn man zuerst ihrer zween, welche man will, mit einander, deren Vielfaches mit dem dritten, das herauskommende mit dem vierten u. s. f. vervielfältiget.

Wenn man z. B. zu den Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, einen gemeinen Nenner sucht, so findet man durch dergleichen Vervielfältigung der Nenner 3, 9, 8, 3, 4, 6, 12 untereinander die Zahl 186624, welche sich durch jedeu von ihnen theilen läßt.

§. 49.

Man sieht inzwischen leicht, daß, wenn unter diesen Nennern eine Zahl mehreremahl vorkommt, man ihrer doch nur einmahl bei dieser Vervielfältigung bedarf.

Nach

Nach welcher Regel man (§. 48.) die eine 3 weglassen kann.

Wenn eine Zahl in der andern als ihrem Vielfachen enthalten ist, kann man ihrer ebenfalls entbehren.

So läßt man hier die andere 3, nebst 4 und 6, als solche weg, die schon in der 12 enthalten sind; worauf noch 9, 8, und 12 übrig bleiben. S. die Exempel zum folgenden §.

Wenn sich unter den übrigen Zahlen zwo oder mehrere durch eine Zahl theilen lassen, so thut man dieses, und braucht an ihrer Stelle den Theiler nebst den Antheilen, als durch deren Vervielfältigung ein Vielfaches einer jeden der ersteren Zahlen erwachsen muß.

So lassen sich z. B. 9 und 12 mit 3 theilen, und geben zu Antheilen 3 und 4, unter denen aber letztere, weil sie in der noch vorhandenen 8 enthalten ist, nach der vorigen Regel weggelassen werden kann.

Zuletzt vervielfältiget man die noch übrigen Zahlen nebst den gebrauchten Theilern mit einander; ihr Vielfaches schickt sich zu allgemeinen Nenner der Brüche.

So entsteht hier aus Vervielfältigung der 3, 8 und 3 die Zahl 72, welche sich eben so wohl als 186624 durch alle Nenner der vorgegebenen Brüche theilen läßt.

§. 50.

So bald man den allgemeinen Nenner hat, ist es leicht die die Zähler der vorgegebenen Brüche darnach einzurichten. Nämlich man theilt denselben durch den Nenner eines jeden Bruches, und

vervielfältiget jedesmahl den Antheil mit dem Zähler des Bruches.

Wie die Zahlen zu den Verrichtungen dieses und des vorigen §. bequemlich zu schreiben und zu behandlen sein, kann man aus den folgenden Beispielen sehen. Die obigen Brüche werden in dem 1sten derselben in $\frac{48}{72}$, $\frac{40}{72}$, $\frac{63}{72}$, $\frac{24}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$, $\frac{42}{72}$ verwandelt

Erstes Exempel. §. 50.

	72		
$\frac{2}{3}$	24	—	48
$\frac{5}{9}$	8	—	40
$\frac{7}{8}$	9	—	63
$\frac{1}{3}$	24	—	24
$\frac{3}{4}$	18	—	54
$\frac{5}{6}$	12	—	60
$\frac{7}{12}$	6	—	42

§. 49

```
3) 9  8  12
   3  8  4
   ------
     24
      3
   ------
     72
```

Zweites Exempel. §. 50.

	360
$\frac{5}{8}$	225
$\frac{7}{9}$	280
$\frac{3}{5}$	216
$\frac{7}{10}$	252
$\frac{11}{12}$	330
$\frac{8}{15}$	192

```
8) 360|45
      | 5
     ----
     225
9) 360|40
      | 7
     ----
     280
5) 360|72
      | 3
     ----
     216
10) 360|36
       | 7
      ----
      252
12) 360|30
       |11
      ----
      330
15) 360|24
       | 8
      ----
      192
```

§. 49.

```
3) 8  9  10  12  15
2) 8  3  10   4   5
   4  3   5
   ----------
         15
          4
        ----
         60
          2
        ----
        120
          3
        ----
        360
```

§. 51.

§. 51.

Die Zusammenzählung solcher Brüche, welche einen Nenner haben, bestehet blos darin, daß man ihre Zähler zusammenzählt, und unter ihre Summe den gemeinschaftlichen Nenner setzt.

Z. B. An den Brüchen $\frac{5}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{7}{24}$ machen die Zähler 5, 6 u. 7 zusammen 18 aus. Die Summe dieser Brüche ist demnach $\frac{18}{24}$ oder (§. 45.) $\frac{3}{4}$.

Haben aber die Brüche verschiedene Nenner, so werden sie vorher unter einen Nenner gebracht, und alsdenn auf die angezeigte Art behandelt.

Erstes Exempel.

	24	
$\frac{1}{3}$	8 —	8
$\frac{3}{8}$	3 —	9
$\frac{1}{6}$	4 —	4
3		21
$\frac{21}{24} \mid \frac{7}{8}$		

Zweites Exempel.

	90	
$2\frac{2}{9}$	10 —	20
$8\frac{1}{6}$	15 —	15
$7\frac{3}{10}$	9 —	27
2		62
$17\frac{62}{90} \mid \frac{31}{45}$		

Drittes Exempel.

$7\frac{2}{3}$	6 —	12
$4\frac{5}{9}$	2 —	10
$6\frac{1}{3}$	6 —	6
$4\frac{5}{6}$	3 —	15
$21\frac{43}{18}$		43

§. 52.

Es trägt sich so wohl bei der Zusammenzählung als auch sonst in Berechnung der Brüche öfters zu, daß der Zähler der herausgebrachten Zahl größer wird als der Nenner. Man merkt alsdenn, daß unter einem solchen uneigentlichen Bruche eine ganze Zahl verborgen sei; und man erkennet sei-

nen Werth, wenn man den Zähler durch den Nenner würklich theilt.

Z. B. Da $\frac{18}{18}$ ein Ganzes ausmachen, so müssen (§. 51. 3tes Exempel) die $\frac{43}{18}$ so viel Ganze enhalten, so viel mahl 18 in 43 enthalten sind. Sie sind es 2 mal, und bleiben noch 7 übrig Daher ist der Werth des Bruches 2 $\frac{7}{18}$, und die Summe des angef. Exempels 23 $\frac{7}{18}$.

§. 53.

Wenn ein Bruch von dem andern, der mit ihm einen Nenner hat, abgezählt werden soll: so wird der Zähler des ersteren von dem Zähler des andern abzählt, und unter den Rest der gemeine Nenner gesetzt.

Soll man z. B. $\frac{4}{9}$ von $\frac{7}{9}$ abzählen, so zählt man 4 von 7 ab, da denn der Rest 3, folglich der gesuchte Rest $\frac{3}{9}$ oder $\frac{1}{3}$ ist.

Haben aber die Brüche verschiedene Nenner, so werden sie zuvor unter einen gebracht, und wie gesagt behandelt.

Erstes Exempel.			Zweites Exempel.		
	24			9	
$\frac{11}{12}$	2 —	22	$8\frac{7}{9}$	1 —	7
$\frac{5}{8}$	3 —	15	$5\frac{1}{3}$	3 —	3
$\frac{7}{24}$		7	$3\frac{4}{9}$		4

§. 54.

Soll aber ein größerer Bruch von einem kleinern abgezählt werden, welches bei diesem eine ganze Zahl voraussetzt: so nimt man von den Ganzen eins in Gestalt eines Bruches weg, der mit den andern Brüchen einen Nenner, folglich auch eben diese Zahl zum Zähler hat, und zählt

es

es zu dem kleineren Bruche. Alsdenn kann man den andern davon abzählen.

Wenn z. B. $\frac{7}{8}$ von $6\frac{3}{8}$ abgezählt werden sollen: so nimt man von den 6 Ganzen 1 unter der Gestalt von $\frac{8}{8}$, und zählt es zu den $\frac{3}{8}$, wodurch $\frac{11}{8}$ entstehen; von welchen die $\frac{7}{8}$ abgezählt $\frac{4}{8}$ oder $\frac{1}{2}$ übrig lassen. Von den 6 Ganzen aber muß man das geborgte 1 wegnehmen, daher ihrer nur 5 bleiben.

Erstes Exempel.		Zweites Exempel.	
	8		30
$6\frac{3}{8}$	$\frac{3}{11}$	$9\frac{1}{6}$	5 — 5
$\frac{7}{8}$	7		35
$5\frac{4}{8}$	4	$4\frac{3}{5}$	6 — 18
oder $5\frac{1}{2}$		$4\frac{17}{30}$	17

§. 55.

Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl ohne Bruch abgezählt werden soll, so verwandelt man ebenfalls 1 von den Ganzen in einen Bruch, der mit des abzuzählenden Nenner einerlei Zähler und Nenner hat, und verrichtet hernach die Abzählung.

So lassen $\frac{5}{12}$ von 9 Ganzen abgezählt $8\frac{7}{12}$ übrig.

Erstes Exempel.		Zweites Exempel.	
9.	$\frac{12}{12}$	4.	$\frac{8}{8}$
—	$\frac{5}{12}$	2	$\frac{3}{8}$
8	$\frac{7}{12}$	1	$\frac{5}{8}$

§. 56.

Die Vervielfältigung eines Bruches durch eine ganze Zahl erfordert eine etlichemahlige Vergrößerung des Bruches. Es geschieht also derselben durch Vervielfältigung des Zählers mit der ganzen

ganzen Zahl und Beibehaltung des Nenners ein Gnüge. (§. 41.)

Z. B. Das Vielfache von $\frac{7}{9}$ mit 12 ist $\frac{84}{9}$ oder $9\frac{1}{3}$.

Exempel. $\frac{7}{9}$ mit 12

$$\overline{7}$$
$$9)\ 84\,|\,9\tfrac{3}{9}\,|^{3}\,\tfrac{1}{3}$$
$$\overline{3}\,|$$

Läßt sich aber der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl theilen, so kann man durch diese Theilung mit Beibehaltung des Zählers der Vervielfältigung des Bruches ebenfalls ein Gnüge thun.

Z. B. Das Vielfache von $\frac{11}{12}$ mit 3 ist $\frac{11}{4}$ oder $2\frac{3}{4}$

§. 57.

Die Vervielfältigung durch einen Bruch erfordert eine etlichemahlige Vergrößerung eines Theiles der andern Zahl, und ist eine aus der Vervielfältigung mit dem Zähler und der Theilung mit dem Nenner zusammengesetzte Verrichtung.

Wenn man z. B. eine Zahl, die mit $\frac{5}{8}$ vervielfältiget werden soll, fünffach nehmen wollte, so würde das Vielfache zu groß werden; weil man dieselbe nicht 5, sondern nur den 8ten Theil von 5mahl (§. 39.) nehmen sollte. Man würde daher das Vielfache 8mahl kleiner machen, oder mit 8 theilen müssen.

§. 58.

Die Vervielfältigung einer ganzen Zahl durch einen Bruch wird demnach durch Vervielfältigung des Zählers mit den Ganzen, und Beibehaltung des Nenners verrichtet; deswegen es einerlei ist, welche von beiden Zahlen man als den Vervielfältiger betrachtet. (§. 56.)

Aus 12 durch $\frac{7}{9}$ vervielfältiget entstehen (wie §. 56.) $9\frac{1}{3}$.

§. 59

§. 59.

Einen Bruch aber durch einen Bruch zu vervielfältigen, vervielfältiget man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Das Vielfache der Zähler giebt den Zähler, und das Vielfache der Nenner den Nenner des gesuchten Vielfachen.

Z. B. Wenn $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ vervielfältiget werden sollen, so sind $\frac{8}{5}$ das zweifache der $\frac{4}{5}$; der dritte Theil hiervon aber $\frac{8}{15}$ ist die gesuchte Zahl (§. 57.)

$$\begin{array}{ll} 5 & \frac{4}{5} \text{ mit } \frac{2}{3} \\ \underline{3} & \overline{4} \\ 15 & \underline{2} \\ \text{Vielf.} & \frac{8}{15} \end{array}$$

§. 60.

Man kann jede ganze Zahl in einen Bruch verwandeln, wenn man sie mit dem ihr bestimmten Nenner vervielfältiget, und das Vielfache zum Zähler nimmt.

Z. B. In der Zahl 6 enthält jedes Ganze $\frac{4}{4}$. Also müssen die 6 Ganzen 6 mahl $\frac{4}{4}$, das ist $\frac{24}{4}$ enthalten.

Wenn daher Ganze und ein Bruch zusammen vorkommen, so läßt sich alles zusammen in einen Bruch verwandeln, wenn man die Ganzen mit dem Nenner des Bruches vervielfältiget, den Zähler dazu zählet, und das herauskommende zum Zähler, den Nenner des Bruches aber zum Nenner nimmt, welches man die Einrichtung solcher zusammengesetzten Zahlen nennet.

Z. B. $6\frac{3}{4}$ werden auf diese Weise in $\frac{27}{4}$ verwandelt.

§. 61.

Wenn eine unter den zu vervielfältigenden Zahlen, oder gar alle beide, Ganze nebst einem

einem Bruche enthalten: so richtet man sie vorher ein, und verfährt hernach besagter Maassen. (§§. 56. 58. 59.)

Wenn z. B. 18 mit $5\frac{3}{4}$ vervielfältiget werden sollen, so verwandelt man die $5\frac{3}{4}$ in $\frac{23}{4}$ und vervielfältiget diese mit 18 (§. 56. 58.), da denn $103\frac{1}{2}$ herauskommen.

Wenn $4\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{8}$ die zu vervielfältigende Zahlen sind, so werden die $4\frac{5}{6}$ in $\frac{29}{6}$ verwandelt, und mit $\frac{7}{8}$ (§. 59.) vervielfältiget, wodurch $4\frac{11}{48}$ entstehen.

Sollen $12\frac{3}{4}$ mit $5\frac{2}{3}$ vervielfältiget werden, so werden die ersteren in $\frac{51}{4}$, und die andern in $\frac{17}{3}$ verwandelt, aus deren Vervielfältigung $72\frac{1}{4}$ entstehen.

§. 62.

Man kann aber auch, wenn Ganze und Brüche zusammen vorkommen, die Vervielfältigung stückweise an den Brüchen und Ganzen verrichten, und die Vielfache zusammenzählen; am leichtesten, wenn die eine Zahl eine nicht gar große ganze Zahl, oder ein Vielfaches weniger solcher Zahlen ist. (§. 21.)

Wenn z. B. 5 mit $18\frac{3}{4}$ zu vervielfältigen sind: so nimmt man zuerst 5 mahl $\frac{3}{4}$ oder $\frac{15}{4}$, woraus $3\frac{3}{4}$ ententstehen; hernach 5 mahl 18, welches 90, und mit dem Vielfachen des Bruches, $93\frac{3}{4}$ giebt.

§. 63.

Die Theilung eines Bruches durch eine ganze Zahl erfordert, daß der Bruch etlichemahl verkleinert werde. Es geschieht ihr also durch Vervielfältigung des Nenners mit der ganzen Zahl, und Beibehaltung des Zählers ein Gnüge. (§. 42.)

Z. B. $\frac{3}{4}$ mit 6 getheilt geben zum Antheile $\frac{3}{24}$ oder $\frac{1}{8}$.

Exempel. 6 in $\frac{3}{4}$

$\frac{4}{24}$ $\frac{3}{24}$ Anth.

Läßt

Läßt sich aber der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl theilen: so kann die Theilung des Bruches auch hierdurch mit Beibehaltung des Nenners verrichtet werden.

$\frac{15}{16}$ durch 3 getheilt geben z. B. $\frac{5}{16}$ zum Antheil.

§. 64.

Die Theilung durch einen Bruch erfordert eine etlichemahlige Verkleinerung eines Vielfachen der andern Zahl, und ist eine aus der Vervielfältigung mit dem Nenner und der Theilung mit dem Zähler zusammengesetzte Verrichtung.

Wenn man eine Zahl, die durch $\frac{3}{4}$ getheilt werden soll, durch 3 theilte, so würde der Antheil zu klein werden, weil man sie nicht 3, sondern nur den 4ten Theil von 3 mahl verkleinern sollte. Man müßte also den Antheil 4 mahl so groß machen, oder mit 4 vervielfältigen. Da aber offenbar ist, daß der Antheil desto größer werden muß, je größer die zu theilende Zahl ist: so darf man nur diese vorher mit dem Nenner vervielfältigen, und das Vielfache mit dem Zähler theilen.

§. 65.

Die Theilung einer ganzen Zahl durch einen Bruch besteht daher in Vervielfältigung der Ganzen mit dem Nenner, und Theilung des Vielfachen mit dem Zähler des Bruches.

Z. B. 6 mit $\frac{3}{4}$ getheilt geben zum Antheile 8 Ganze.

Exempel. $\frac{3}{4}$ in 6

$$\frac{4}{3)\ 24|\ 8 \text{ Anth.}}$$

§. 67

§. 66.

Soll man einen Bruch durch einen Bruch theilen: so vervielfältiget man Zähler mit Nenner und Nenner mit Zähler. Der veränderte Zähler der zu theilenden Zahl wird der Zähler, ihr veränderter Nenner aber der Nenner des Antheiles.

Wenn z. B. $\frac{5}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ getheilet werden sollen, so nimmt man erst das 4 fache der $\frac{5}{6}$, welches $\frac{20}{6}$ macht. Dieses theilt man mit 3, woraus $\frac{20}{18}$ oder $1\frac{1}{9}$ entstehen.

Exempel. $\frac{3}{4}$ in $\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{cccc} & & & 2 \\ \overset{3}{\frac{6}{18}} & 18)\ \overset{5}{\frac{4}{20}} & 1\frac{2}{18} & \frac{1}{9} \\ & 2 & & \end{array}$$

§. 67.

Wenn entweder in der einen Zahl, oder in allen beiden Ganze mit einem Bruche vorkommen, so richtet man sie ein. (§. 60.) Worauf man entweder einen Bruch durch eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl durch einen Bruch, oder einen Bruch durch einen Bruch zu theilen haben wird.

Wenn z. B. $42\frac{2}{3}$ durch 12 zu theilen sind, so verwandelt man die $42\frac{2}{3}$ in $\frac{128}{3}$, welche mit 12 getheilt (nach §. 63.) $3\frac{5}{9}$ zum Antheil geben. Soll man 15 durch $8\frac{3}{4}$ theilen, so werden aus diesen $\frac{35}{4}$ gemacht, womit man die 15 (nach §. 65.) theilt, und $1\frac{5}{7}$ zum Antheile erhält.

So geben $6\frac{1}{2}$ mit $\frac{5}{8}$ getheilt $10\frac{2}{5}$
$\frac{9}{10}$ mit $2\frac{1}{4}$ — $\frac{2}{5}$ } §. 66.
$10\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{3}$ — $2\frac{1}{4}$

§. 68.

Doch kann man, wenn die zu theilende Zahl Ganze nebst einem Bruche enthält, der Theiler aber eine

eine nicht gar zu große ganze Zahl ist, die Theilung auch Stückweise verrichten. Man fängt dieselbe bei den Ganzen an, richtet den Rest, wenn einer bleibt, mit dem Bruche ein, und theilt ihn besonders.

Z. B. 66$\frac{7}{8}$ mit 5 getheilt geben zuerst 13 Ganze, und 1 zum Rest. Diese 1$\frac{7}{8}$ oder $\frac{15}{8}$ theilt man besonders mit eben der 5 und erhält noch $\frac{3}{8}$; also insgesammt 13$\frac{3}{8}$.

III. Von den benannten Zahlen.

§. 69.

Wenn man die Rechenkunst auf würkliche Fälle anwendet: so gehen die dabei vorkommende Zahlen auf Größen von gewissen Arten und Benennungen. Z. B. Rthlr. ℔. Ellen oder dergl. Solche Zahlen heißen benannte Zahlen. Daß sich dadurch allerlei Größen ausdrücken, und hiermit arithmetisch behandeln lassen, ist übrigens leicht zu begreiffen.

§. 70.

Die Berechnung derselben setzt die bisherigen allgemeinen Regeln voraus. Doch macht die Gewohnheit und Bequemlichkeit dabei noch einige besondere Verrichtungen nöthig, welche hauptsächlich daher entstehen, daß wir die Größeren Arten des Maaßes, Gewichtes, Wehrtes oder anderer Grössen in kleinere theilen, jeden besondere Namen beilegen, und öfters in dem Ausdrucke einer Größe mehrere solche Namen z. B. Rthl. Gr. Pf. mit einander verbinden.

§. 71.

Die ganze Sache kommt darauf an, daß man theils die Größen von geringerer Benennung auf

eine höhere, theils auch die von höherer Benennung auf eine geringere zu bringen wisse; welches beides demjenigen leicht ist, dem die angenommenen Eintheilungen des Maaßes, Gewichtes, Geldes und dergleichen bekannt sind, und der folglich die Zahl derer Größen von einer geringeren Benennung weiß, die auf eine der höheren gehen. Denn durch die Theilung mit dieser Zahl werden die Größen von einer geringeren Benennung auf eine höhere, durch die Vervielfältigung mit eben derselben aber die von einer höheren auf eine geringere gebracht.

Will man z. B. Groschen zu Thalern machen, so theilt man sie mit 24; weil man für jede 24 Groschen 1 Rthlr. erhalten muß. Will man Pfund in Loth verwandeln, so vervielfältigt man sie mit 32, weil jedes derselben 32 Loth enthält.

§. 72.

Wenn Zahlen von verschiedenen Benennungen zusammengezählt werden sollen: so schreibt man sie dergestalt hin, daß die von einer Benennung in einer Reihe unter einander stehen.

Wenn z. B. 7 Rthlr. 23 Gr. 11 Pf., 6 Rthlr. 12 Gr., 9 Rthlr. 22 Gr. 4 Pf. und 4 Rthlr. 10 Pf. zusammengezählt werden sollen, schreibt man sie so hin:

Rthlr.	Gr.	Pf.
7	23	11
6	12	—
9	22	4
4	—	10
	59	25
28 tl.	11 gr.	1 pf.

12) 25 | 2 Gr.
25
1 Pf.

24) 59 | 2 Rthlr.
48
11 Gr.

Alsdenn zählt man die Zahlen einer jeden Benennung besonders zusammen, wobei man von der

der geringsten, und wenn bey dieser Brüche befindlich sind, von diesen, den Anfang macht, und nach und nach zu den höhern Benennungen fortgeht.

Wenn man eine derselben zusammengezählt hat, so überlegt man, wie viel von der folgenden höhern Benennung darin sind.

Diese zählt man zu der letzteren, und nur das, was darüber ist, setzt man herunter in die Summe.

Wenn man alle Benennungen zusammengezählt, und dabei das bemerkte beobachtet hat, so ist das, was man darunter geschrieben hat, die verlangte Summe.

Hier kommen aus den Pf. 25, welche mit 12 getheilt 2 Gr. geben, und 1 Pf. übrig lassen. Diesen setzt man herunter; die 2 Gr. aber zählt man zu den übrigen Groschen, wo durch man ihre 59 erhält. Diese theilt man mit 24, den Rest 11 setzt man unter die Groschen, die 2 herauskommende Thaler zählt man den übrigen zu, und erhält zur Summe 28 Rthl. 11 Gr. 1 Pf.

Zweites Exempel.

Scheff.	Metz.	4	
16	$8\frac{3}{4}$	1 — 3	
7	$15\frac{1}{2}$	2 — 2	
14	$12\frac{1}{4}$	1 — 1	
36		4)6	$1\frac{2}{4}$
		2	
39 Scheff.	$4\frac{1}{2}$ Metz.		

Drittes Exempel.

Pfd.	Loth	Qtl.	8	
7	8	$3\frac{1}{4}$	2 — 2	
9	25	$2\frac{7}{8}$	1 — 7	
12	31	$3\frac{1}{2}$	4 — 4	
66	9		8)13	$1\frac{5}{8}$
			5	
30 Pd.	2 L.	$1\frac{5}{8}$ Qtl.		

§. 73.

Wenn eine Größe mehrerer Benennungen von einer andern abgezählt werden soll, so schreibt man die erste unter die andere, wie beim zusammenzählen.

Soll man z. B. 3 Rthlr. 18 Gr. 3 Pf. von 32 Rthlr. 9 Gr. 8 Pf. abzählen, so schreibt man sie wie folget:

Rthlr.	Gr.	Pf.
32	9	8
3	18	3
28 Rthlr.	15 Gr.	5 Pf.

Alsdenn verrichtet man die Abzählung bei jeder Benennung insbesondere, wobei man ebenfalls von den geringern zu den höhern geht, den Rest einer jeden aber heruntersetzt.

Wenn irgendwo eine größere Zahl von einer kleineren abgezählt werden soll, oder wenn von der Benennung, wovon man abzählen soll, gar nichts vorhanden ist: so nimmt man 1 von der folgenden höhern Benennung zu Hülfe, welches so viel gilt, so viel der abzuzählender Größen darunter begriffen sind. Alsdenn kann man abzählen.

Bei den Groschen sollen hier 18 von 9 abgezählt werden. Man nimmt deswegen 1 Rthlr. d. i. 24 Gr. zu Hülfe zu den 9 Gr., wodurch man ihrer 33 erhält, von welchen die 18 abgezogen 15 übrig lassen. Von den Thalern aber sind nunmehr 4 abzuzählen. So erhält man 28 Rthlr. 15 Gr. 5 Pf.

Zweites Exempel.

Rthlr.	Gr.	Pf.
17	4	—
9	14	8
7 Rthlr.	13 Gr.	4 Pf.

Drittes Exempel.

℔	Loth	Qtl.	8
60	—	$1\frac{1}{2}$	4 — 4
24	16	$2\frac{1}{8}$	1 — 1
35 ℔	15 L.	$3\frac{3}{8}$ Qtl.	3

§. 74.

Die Vervielfältigung und die Theilung benannter Zahlen von einer einzigen Benennung geschehen an sich selbst blos nach den allgemeinen Regeln dieser Rechnungsarten. Der Vervielfältiger

oder

oder der Theiler werden als unbenannte Zahlen betrachtet.

Folgende Exempel werden daher keiner Erläuterung bedürfen:

1. Exempel. (§. 18.)

18 Gr. mit 27
27
126
36
486 Gr. Vielf.

2. Exempel. (§. 56.)

$\frac{7}{72}$ Rthlr. mit 5
7
5
Vielf. $\frac{35}{72}$ Rthlr.

3. Exempel. (§. 61. u. 59.)

$2\frac{1}{2}$ Loth mit $17\frac{1}{4}$
2 | 5 | 69
4 | | 5
8 | 8) 345 | Vielf. 43$\frac{1}{8}$ Loth
1

4. Exempel. (§. 29. u. 40.)

13 in 21 ℔
13) 21 | Anth. $1\frac{8}{13}$ ℔
8

5. Exempel. (§. 63.)

16 in $6\frac{1}{4}$ Rthlr.
4 Anth. $\frac{25}{64}$ Rthlr.
64

6. Exempel. (§. 61. u. 66.)

$\frac{3}{4}$ in $5\frac{1}{2}$ Rthlr.
3 | 11
2 | 4 Anth.
6 | 6) 44 | $7\frac{2}{6}$ Rthlr.
2

§. 75.

Doch hat man bei den herausgebrachten Grössen dahin zu sehen, daß man ihren Werth auf diejenige Art ausdrücke, die der Bequemlichkeit oder der Gewohnheit die gemäßeste ist. Daher man

1) Wenn die gefundene Zahl einige Ganze von einer höheren Benennung enthält, sie auf diese Benennung bringt.

So lassen sich in den 1sten der obigen Exempel die 486 Gr. in 20 Rthlr. 6 Gr., in dem 3ten die 43 Loth in 2 ℔ 11 Loth verwandeln.

2) Wenn ein Bruch von einer höheren Benennung darin vorkommt, bringt man ihn auf die folgende geringere, um zu sehen, ob nicht einige Ganze dieser Benennung darin enthalten sein, welches man die Auflösung der Brüche zu nennen pflegt.

So werden in dem 2ten Exempel die $\frac{35}{72}$ Rthlr. in 11 Gr. 8 Pf., in dem 4ten die $\frac{8}{13}$ ℔ in 19 Loth $2\frac{10}{13}$ Qtl. u. s. f. verwandelt. S. hier unten.

Erstes Exempel.

24)486 | 20 Rthlr.
48
6 Gr.

Zweites Exempel.

35
24
140
70
72)840 | 11 Gr.
72
120
72
48
12
96
48
72)576 | 8 Pf.
576
0

Drittes Exempel.

32
8)345 | 43 | 1 ℔
25 | 32
1 | 11 Loth
4 4
$\frac{4}{8}$ | $\frac{1}{2}$

Viertes Exempel.

13)21 | 1 ℔
13
8
32
13)256 | 19 Loth
13
126
117
9
4
13) 36 | $2\frac{10}{13}$ Qtl.
26
10

Fünftes Exempel.

25
24
100
50
64)600 | 9 Gr.
576
24
12
48
24
64)288 | $4\frac{1}{2}$ Pf.
256
32

Sechstes Exempel.

6)44 | 7 Rthlr.
2
24
6)48 | 8 Gr.
0

§. 76.

§. 76.

Wenn eine benannte Zahl mehrere Benennungen in sich hält, so kann man sie leicht auf eine, nämlich die geringste der dabei vorkommenden Benennungen bringen. Man fängt nämlich die Verwandlung (§. 71.) bei der höchsten derselben an, und zählt den herauskommenden Größen diejenigen zu, welche noch von eben der Benennung vorhanden sind.

So werden hier z. B. 10 Rthlr. 6 Gr. 3 Pf. in 2955 Pf., 2 Ctl. $6\frac{3}{8}$ ℔ in $226\frac{3}{8}$ ℔ verwandelt.

Erstes Exempel.

```
10 Rthlr. 6 Gr. 3 Pf.
 24
----
 240
   6
----
 246 Gr.
  12
----
 492
246
----
2952
   3
----
2955 Pf.
```

Zweites Exempel.

```
2 Ctl. 6 3/8 ℔
110
----
220
  6
----
226 3/8 ℔
```

§. 77.

Wenn man auf diese Weise alles unter eine Benennung gebracht hat, so läßt sich die Vervielfältigung oder die Theilung nach den gemeinen Regeln verrichten.

Es würde eine unnütze Weitläuftigkeit verursachen, wenn wir diese Regeln auf jeden der folgenden Fälle insbesondere anwenden wollten. Wir wollen dieselben vielmehr der Uebung angehender

Rechner überlassen, und uns mit blosser Bemerkung desjenigen, was herauskommen soll, begnügen.

1) Aus 10 Rthlr. 6 Gr. 3 Pf. mit 23 vervielfältiget entstehen 235 Rthlr. 23 Gr. 9 Pf.

2) Aus 2 Ctl. 6⅜ ℔ mit 15 vervielfaltiget 30 Ctl. 95 ℔ 20 Loth.

3) Aus 4 Rthlr. 7 Gr. mit 18⅝ vervielfältiget 80 Rthlr. 19 Gr. 10 Pf.

4) Aus 347 Rthlr. 19 Gr. mit 68 getheilet 5 Rthlr. 2 Gr. 9 Pf.

5) Aus 410 ℔ 25⅝ Loth mit 57 getheilet 7 ℔ 6 Loth 2½ Qtl.

6) Aus 9 Rthlr. 6 Gr. mit 13½ getheilet 16 Gr 5⅓ Pf.

7) Aus 21 Gr. 10½ Pf. mit ⅝ getheilet 1 Rthlr. 2 Gr. 3 Pf.

§. 78.

Es lassen sich aber die Vervielfältigung und die Theilung benannter Zahlen auch ohne die Bringung unter eine Benennung stückweise verrichten, und zwar denn mit einigem Vortheile, wenn der Vervielfältiger oder der Theiler entweder eine kleine ganze Zahl, oder ein Vielfaches weniger solcher Zahlen ist.

§. 79.

Bei der Vervielfältigung geht man nämlich von den geringeren zu den höhern Benennungen, und bemerkt bei jedem Vielfachen dieses, daß, wenn einige von der folgenden höheren Benennung darin enthalten sind, man sie zu dem Vielfachen derselben zählt, und nur das übrige in das Vielfache der geringeren schreibt.

Wenn z. B. 7 Rthlr. 10 Gr. 2¼ Pf. mit 8 vervielfältiget werden sollen, so nimmt man zuerst 8 mahl

¼ Pf.

$\frac{1}{4}$ Pf. welche 2 ganze Pf. ausmachen, und 8 mahl 2 Pf. welche mit jenen 18 Pf. oder 1 Gr. 6 Pf. ausmachen. Die 6 Pf. schreibt man in das Vielfache der Pf., den 1 Gr. aber behält man auf. Hierauf nimt man 8 mahl 10 Gr., welche 80 und mit dem 1 aufbehaltenen 81 Gr. oder 3 Rthlr. und 9 Gr. betragen, von denen diese 9 in das Vielfache der Gr. kommen, die 3 Rthlr. aber aufbehalten werden. Endlich 8 mahl 7 Rthlr. machen 56 und mit den 2 aufbehaltenen 59 Rthlr. Daher ist das Vielfache 59 Rthlr. 9 Gr. 6 Pf.

§. 80.

Bei der Theilung hingegen geht man von den höheren zu den geringern Benennungen. Man verwandelt jederzeit den Rest in die folgende geringere Benennung, nimmt diejenige Größen, so von eben derselben in der gegebenen Zahl enthalten sind, dazu, und setzt die Theilung fort.

Wenn z. B. 38 Rthlr. 19 Gr. 10$\frac{4}{5}$ Pf. mit 7 getheilt werden sollen, so theilt man zuerst 38 Rthlr., wodurch man 5 zum Antheil der Thaler und 3 zum Rest erhält. Diese 3 enthalten 72 und mit den 19 zusammen 91 Gr., welche mit 7 getheilt 13 für die Gr. geben, und nichts übrig lassen. Man theilt also 10 Pf. mit 7, wodurch man 1 zum Antheil und 3 zum Rest erhält. Diese machen mit den $\frac{4}{5}$ zusammen $\frac{19}{5}$ aus, deren Antheil durch 7 noch $\frac{19}{35}$ ausmacht; daher der gesuchte Antheil 5 Rthlr. 13 Gr. 1$\frac{19}{35}$ Pf. beträgt.

§. 81.

Es lassen sich außer diesen bei der Vervielfältigung und Theilung der benannten Zahlen noch mancherlei Vortheile anbringen. Da aber dieselben durch das dabei erforderliche Nachdenken Anfängern öfters mehr Zeitverlust als Abkürzung der Arbeit verursachen; auch nicht von so allgemeinen Umfange, als die bisherigen Vorschriften sind: so überlassen wir sie solchen, deren besonderer Beruf es erfordert, auf alle Abkürzungen der Rechnungen genau zu sehen.

Zweite Abtheilung

der

Rechenkunst,

in welcher

die Regeldetri erkläret und auf die gebräuchlichsten Rechnungen angewandt wird.

I. Die einfache Regeldetri.

§. 82.

Diejenige Eigenschaft einer Zahl, daß dieselbe entweder eine andere, womit sie verglichen wird, etlichemahl in sich enthält, oder in derselben enthalten ist, nennet man ihr **Verhältniß** zu derselben. Z. B. das Verhältniß der 7 zu 28 besteht darin, daß 7 in 28 viermahl enthalten, oder viermahl so klein sind als dieselben; hingegen das Verhältniß der 12 zu 8 darin, daß 12 anderthalbmahl die 8 in sich halten, oder anderthalbmahl so groß sind. Die mit einander verglichene Zahlen werden die **Glieder des Verhältnisses** genannt.

§. 83.

Man erkennt leicht das Verhältniß zwoer Zahlen unter einander, wenn man die größere durch die kleinere theilt (§. 23.); daher der Antheil einer solchen Theilung der **Verhältnißzeiger** (Exponent des Verhältnisses) genannt wird.

§. 84.

Wenn 4 Zahlen von der Beschaffenheit sind, daß sich die erste zur zweiten eben so verhält, wie die dritte zur vierten: so nennet man sie **Proportionalzahlen**, und sagt, es finde unter ihnen eine **Proportion** Statt.

So sind z. B. die Zahlen 6, 2, 24, 8 einander proportional, weil sowohl die 6 die 2, als die 24 die 8 dreimal in sich hält. Desgleichen 2, 3, 10, 15.

§. 85.

In einer jeden Proportion ist das Vielfache der ersten Zahl mit der vierten, dem Vielfachen der zweiten mit der dritten gleich. Beide vielfache entstehen nämlich aus einerlei Zahlen, den kleinern Gliedern beider Verhältnisse, und dem Verhältnißzeiger.

Da z. B. in der Proportion 6, 2, 24, 8 die 6 der 2 dreimal genommen gleich ist, so muß vermöge der Proportion die 24 der 8 dreimahl genommen gleich sein. Da es nun einerlei ist, ob man die 8 mit 6, oder mit 3, und das herauskommende mit 2, imgleichen ob man die 2 mit 24, oder mit 8 und das herauskommende mit 3 vervielfältiget (§. 21.): so entstehen beide Vielfache aus 2, 3 und 8, und geben 48.

§. 86.

Diese Eigenschaft der Proportion giebt ein Mittel an die Hand zu jeden drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden; welche Rechnung die **Regeldetri** (Proportionsrechnung) genannt wird. Man darf nämlich nur die zweite und dritte der gegebenen mit einander vervielfältigen, und das Vielfache durch die erste theilen.

Denn

Denn da dieses eben so viel ist, als wenn man das Vielfache der ersten mit der vierten durch die erste getheilt hätte (§. 85.) so ist klar, daß der Antheil die gesuchte Zahl sein muß (§. 34.).

§. 87.

Da Verhältnisse und Proportion unter allerlei Größen Platz finden, und sich diese durch benannte Zahlen ausdrücken lassen: so beut uns eben diese Rechnung ein Mittel dar, zu jeden drei bekannten Größen die vierte Proportionalgröße zu finden; welches sowohl im gemeinen Leben, als in Wissenschaften von unaussprechlichem Nutzen ist.

§. 88.

Daß aber ein vorgegebener Fall für die Regeldetri gehöre, kann man daraus sehen, wenn unter den drei gegebenen Größen zwo sind, die in einem gewissen Verhältnisse mit einander stehen; und wenn man findet, daß zwischen der dritten gegebenen und der gesuchten eben dasselbe Verhältniß Statt findet.

Wenn man z. B. wissen wollte, wie viel 60 ℔ von einer Waare kosten müssen, wovon 8 ℔ 9 Rthlr. kosten, so wäre dies ein solcher Fall; denn man merkt leicht, daß der gesuchte Preis so viel mahl größer sein muß als 9 Rthlr., so viel mahl die 60 ℔ größer sind als 8 ℔.

§. 89.

Wenn unter den drei Sätzen (so pflegt man die gegebenen Größen zu nennen) diejenigen, welche das Verhältniß ausmachen, und in der Proportion die ersten sind, nur eine und einerlei Benennung haben: so verhalten sie sich unter einander wie die

Zah-

Zahlen, die sie in sich halten, als unbenannte betrachtet. Z. B. 8 ℔ verhalten sich zu 60 ℔, wie die Zahl 8 zur Zahl 60. Der dritte Satz wird daher durch den zweiten als durch eine unbenannte Zahl vervielfältiget, und das Vielfache durch den ersten eben so getheilt.

§. 90.

Die besondern Regeln hierzu sind aus §. §. 74 — 81 zu nehmen, und bedarf es keiner Wiederholung derselben. Zu ihrer Uebung können folgende Fälle dienen.

1. Exempel S. §. 88.
Die 60 ℔ kosten 6 Rthlr. 12 Gr.

2. Wie viel jährliche Zinsen geben 1537 Rthlr. zu 6 pro Cent? oder: wenn 100 Rthlr. Capit. 6 Rthlr. Zinsen geben, wie viel 1537 Rthlr. Capital?
Sie geben 92 Rthlr. 5 Gr. $3\frac{9}{25}$ Pf.

3. Wenn man für 12 Rthlr. 1 Cent. 17 ℔ 3 L. kaufen kann, wie viel muß man für 35 Rthlr. erhalten?
Man erhält 3 Cent. 40 ℔. 22 L. $\frac{1}{3}$ Q.

§. 91.

Wenn die beiden ersten Sätze verschiedene, oder mehrere Benennungen haben: so verhalten sich ihre Zahlen nicht untereinander, wie sie selbst. Z. B. 15 Gr. verhalten sich zu 7 Rthlr. keinesweges, wie die Zahl 15 zur Zahl 7. In solchem Falle bringt man sie vorher unter eine Benennung, und braucht die herauskommenden Zahlen an ihrer Stelle.

1. Exempel. Wenn man für 15 Gr. 6 ℔. 4 L. 2 Q. kauft, wie viel für 7 Rthlr?
Man verwandelt die 7 Rthlr. in 168 Gr. und erhält 68 ℔. 24 L. $3\frac{1}{5}$ Q.

2. 3 ℔

2. Ex. 3 ℔. 2 L. kosten 8 Rthlr. 4 Gr. wie viel 19 ℔?

Man verwandelt 3 ℔. 2 L. in 98 L. und die 19 ℔. in 608 L. alsdenn erhält man 50 Rthlr. 16 Gr.

§. 92.

Wenn in der Regeldetri Brüche vorkommen: so sind zwar die oben (§. 74. folg.) gegebene Regeln zu deren Behandlung völlig hinreichend; doch wollen wir, Anfängern zu Gefallen, dieselben für die Regeldetri etwas bequemer einzurichten suchen.

§. 93.

Wenn in einem der beiden ersten Sätze ein Bruch vorkommt, so macht man den andern ebenfalls zu einem Bruche, der eben den Nenner hat (§. 60); und bedient sich der Zähler als ganzer Zahlen, ohne sich um die Nenner zu bekümmern. Wobei sich versteht, daß wenn der erstgedachte Satz nebst dem Bruche auch Ganze hat, man ihn vorher einrichten muß, (ang. Ort) um seinen Zähler zu finden. Denn man sieht leicht, daß sich die Zähler derer Brüche, welche einen Nenner haben, unter einander wie Ganze verhalten; daß z. B. $\frac{3}{4}$ sich zu $\frac{16}{4}$ verhalten, wie 3 zu 16. Daher die vierte Proportionalzahl bei dem letztern dieser Verhältnisse keine andere, als bei dem erstern sein kann.

1. Exempel. $\frac{7}{8}$ Ellen kosten 2 Rthlr. 8 Gr. was 17 Ellen?

Man verwandelt die 17 in $\frac{136}{8}$ und sucht zu 7, 136 und 2 Rthlr. 8 Gr. die vierte Proportionalgröße. Sie ist:

45 Rthlr. 8 Gr.

2. Ex.

2. Exempel. 19 ℔. kosten 2 Rthlr. 15 Gr 4 Pf. was $85\frac{3}{4}$ ℔? Die 19 ℔ werden in $\frac{76}{4}$ und die $85\frac{3}{4}$ in $\frac{343}{4}$ verwandelt, und man erhält

11 Rthlr. 21 Gr. 10 Gr.

§. 94.

Haben die beiden ersten Sätze Brüche, so vervielfältiget man den Zähler und Nenner eines jeden mit dem Nenner des andern Bruches. Sie erhalten hierdurch einen Nenner, und man bedient sich, wie vorhin, der Zähler als Ganzen, ohne sich um jenen zu bekümmern.

1. Exempel $\frac{3}{5}$ Schock kosten 6 Gr. 6 Pf. was $6\frac{1}{2}$ Schock?

Man verwandelt die $\frac{3}{5}$ mit dem Nenner 2 in $\frac{6}{10}$, die $6\frac{1}{2}$ oder $\frac{13}{2}$ aber mit dem Nenner 5 in $\frac{65}{10}$, an deren Stelle man 6 und 65 gebraucht. Man erhält dadurch

2 Rthlr. 22 Gr. 5 Pf.

2. Exempel. Für $12\frac{1}{4}$ Rthlr. erhält man 28 ℔. wie viel für $18\frac{2}{3}$ Rthlr.

Man verwandelt die Sätze in $\frac{147}{12}$ und $\frac{224}{12}$ und erhält

42 ℔. $21\frac{1}{3}$ Lth.

§. 95.

Enthält der dritte Satz einen Bruch: so vervielfältiget man den ersten Satz als den Theiler mit dem Nenner desselben, und braucht dieses Vielfache als Theiler oder Nenner. (§. 62.)

1. Exempel. Von einer gewissen Waare wiegen 35 Stück $\frac{3}{8}$ Cent. wie viel 238 Stück?

Sie wiegen 2 Cent. $60\frac{1}{2}$ ℔.

2. Exempel. $22\frac{1}{2}$ ℔. kosten 15 Rthlr. $16\frac{7}{8}$ Gr. wie viel kosten 46 ℔.

Sie kosten 32 Rthlr. 2 Gr. 6 Pf.

3. Ex-

3. Exempel $7\frac{5}{6}$ Schock kosten 26 Rthlr. $22\frac{3}{4}$ Gr. was $43\frac{4}{5}$ Schock?

Sie kosten 150 Rthlr. 13 Gr. 6 Pf.

§. 96.

In den bisher vorgegebenen Aufgaben bot die Ordnung der Sätze sich, so zu reden, von selbst an. Der dritte Satz stand mit dem ersten in einer gewissen Verbindung, z. B. als der Preis mit der dafür feilen Waare, die Zinsen mit dem Capital, oder dergleichen, und eben solche Verbindung hatte zwischen dem gesuchten und dem zweiten Satze Statt. Die Ordnung der Proportion war also überhaupt diese: Wie der erste Satz zum zweiten, so der, der mit dem ersten, zu dem, der eben so mit dem zweiten verbunden ist, in welchem Falle man sagt: Die ersteren Größen **verhalten sich gerade zu** wie die letzteren.

§. 97.

Oft findet aber das Widerspiel Statt. Wenn 4 Mann mit einem Vorrath 6 Tage auskommen, so können 12 Mann, die eben so viel verzehren, nur 2 Tage damit reichen. Hier machen die Zahlen 4, 12, 6, 2, nur denn eine Proportion aus, wenn man entweder die beiden ersteren, oder die beiden letzteren mit einander verwechselt; und es verhalten sich wie die zweite zur ersten, so die, welche mit der ersten in Verbindung steht, zu der, die mit der zweiten eben die Verbindung hat. Man sagt denn: die ersteren **verhalten sich umgekehrt** wie die letzteren; und man würde, wenn man aus den drei ersten 4, 12, 6 die vierte durch die Regeldetri finden sollte, die beiden ersten mit einan-verwechseln müssen.

§. 98.

§. 98.

Man hat nicht nöthig hieraus eine besondere Rechnungsart, eine umgekehrte Regeldetri zu machen, wenn man nur bey Ordnung der Sätze überhaupt folgender Maaßen verfährt. Man sondere zuerst den dritten Satz aus, welcher allezeit mit dem gesuchten zu einem Verhältnisse gehört; und überlege, ob nach den Bedingungen der Aufgabe das gesuchte größer oder kleiner als derselbe ausfallen müsse? Muß es größer werden, so stelle man unter den beiden übrigen Sätzen den kleinern voran; muß es kleiner werden, den grössern. Hiernach beurtheile man die folgenden untermengte Fälle.

1. Von einem $1\frac{3}{4}$ Ellen breiten Zeuge werden zur Ausschlagung eines Zimmers 216 Ellen erfordert, wie viel, wenn die Breite 2 Ellen beträgt?

2. Ein Fuhrmann, der die Fracht meilenweise bedingt, läßt sich für eine gewisse Last auf 15 Meilen $2\frac{1}{2}$ Rthlr. bezahlen, wie viel gebührt ihm, wenn er dieselbe 28 Meilen weit führt?

3. Wenn er Centnerweise verdingt, und zu einem gewissen Preise auf 32 Meilen $16\frac{1}{4}$ Cent. aufnimmt, wie viel wird er zu eben dem Preise auf $19\frac{1}{2}$ Meile übernehmen?

4. Aus einer gewissen Casse wird den Armen monatlich ein gewisses ausgezahlt. So lange 30 daran Theil hatten. erhielt jeder $3\frac{3}{8}$ Rthlr. wieviel wenn ihrer 54 daran Theil nehmen?

§. 99.

Wenn man die beiden Glieder eines Verhältnisses etlichemal größer oder kleiner macht, so muß die herauskommende größere Zahl in der größeren, oder die kleineren in der kleineren, noch eben so oft

enthalten bleiben, als vorher. Z. B. 4 ist in 12 dreimal enthalten; und eben so oft ist 8 in 24 oder 2 in 6 enthalten.

Wenn sich die beiden ersten Sätze der Regeldetri durch eine Zahl theilen lassen, so kann man an ihrer Stelle die Antheile gebrauchen.

1. Wie viel Aufgeld geben 2400 Rthlr. Crt. gegen Gold zu $6\frac{3}{8}$ pro Cent? oder wenn 100 Rthlr. Crt. $6\frac{3}{8}$ Rthlr. Aufgeld geben, wie viel geben, 2400 Rthlr Crt.?
Hier kann man die Zahlen 100 und 2400 mit 100 theilen, und an ihrer Stelle 1 und 24 brauchen. Man übe sich selbst an folgenden Exempeln.

2. $8\frac{2}{5}$ Schock kosten 9 Rthlr. 8 Gr. was $18\frac{3}{4}$ Sch.

3. Wenn 288 Stück mit $27\frac{2}{3}$ Rthlr. bezahlt werden, was kosten 432 Stück?

§. 100.

Wenn man entweder die erste und dritte, oder die zweite und vierte Größe in einer Proportion etliche mahl größer oder kleiner macht: so bleibt die Proportion ungestöhrt, weil beide Verhältnisse auf einerlei Art verändert werden, und hiermit gleich bleiben müssen. Wenn man z. B. in der Proportion 6, 24, 9, 36, die ersten Glieder der Verhältnisse 6 und 9 dreimahl so klein macht, so sind 2 und 3 in den zweiten Gliedern 24 und 36 dreimahl so oft als vorher, und wenn man sie verdoppelt, 12 und 18 halb so oft als vorher, aber immer beide gleich oft enthalten.

Wenn sich der erste und dritte Satz der Regeldetri durch eine Zahl theilen lassen: so kann man daher die Antheile an ihrer Stelle gebrauchen.

1. Wenn 300 Stück 65 ℔. wiegen, wie viel wiegen 216 dergleichen Stück?

2. Wenn 3 ℔. 4 Rthlr. kosten, was kosten 10 ℔. 16 Loth?

II. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 101.

Das Verhältniß einer Größe zu der andern ist an sich selbst jederzeit ein einfaches Verhältniß. Doch giebt es Fälle, wo man dasselbe nicht unmittelbar, und nicht anders als durch Betrachtung mehrerer besonderen Verhältnisse erkennt. In so fern schreibt man jenen Größen ein zusammengesetztes Verhältniß zu.

So steht z. B. der Lohn, den 7 Tagelöhner für 5tägige Arbeit empfangen mit demjenigen, der 12 Tagelöhnern für 4tägige Arbeit zukommt, in einem zusammengesetzten Verhältnisse, in so fern man das Verhältniß des eines Lohnes zu dem andern nicht deutlich begreiffen, noch von dem einen auf den andern schliessen kann, als wenn man sowohl auf das Verhältniß der 7 Mann zu 12 Mann, als der 5 Tage zu 4 Tagen sieht.

Setzte man hinzu, daß den letzten Tagelöhnern auf jeden Gulden, den sie nach diesem Preise verdienen würden 3 Gr. Trinkgeld, und also für jede 16 Gr. 19 Gr. zugestanden würden: so käme auch dieses letzte Verhältniß mit in Betrachtung, und würde das Verhältniß des einen Lohnes zn dem andern aus 7 zu 12, 5 zu 4, und 16 zu 19, das ist, aus den Verhältnissen der Personen, der Arbeitstage und der Preise zusammengesetzt seyn.

§. 102.

Es giebt mancherlei Fälle, da man eine Größe sucht, deren Verhältniß zu einer gegebenen aus mehreren gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt ist. Die dazu gehörige Rechnung wird die zusammengesetzte Regeldetri, und zwar, nach der

Anzahl der dazu gegebenen Sätze, *Regula quinque Septem* u. s. f. genannt.

§. 103.

Die Rechnung kann so verrichtet werden: Man sucht zuerst zu einem nach belieben unter den gegebenen gewählten Verhältnisse und der Zahl, welche mit dem gesuchten im Verhältnisse steht, durch die einfache Regeldetri die vierte Proportionalzahl.

Eben so macht man es mit einem andern Verhältnisse und der gefundenen Zahl; und eben so fährt man fort, bis man alle Verhältnisse durchgegangen ist.

Die zuletzt gefundene ist die verlangte Zahl.

Gesetzt die 7 Mann hätten in dem oben angeführten Falle (§. 101) 23⅓ Rthlr. erhalten: so sucht man durch die erste Regeldetri 7 M. 12 M. 23⅓ Rthlr. blos, wie viel die 12 Mann für eben so lange Arbeit zu eben dem Preise zu fordern hätten, und erhält 40 Rthlr. Durch die zweite 5 T. 4 T. 40 Rthlr. wie viel ihnen zu eben dem Preise für viertägige Arbeit zukäme, wodurch man 32 Thl. findet. Endlich durch die dritte Regeldetri 16 Gr. 19 Gr. 32 Rthlr erforscht man, wie viel sie nach der ihnen zugestandenen Zulage haben müssen. Man findet 38 Rthl. deren Verhältniß zu den 23⅓ Rthlr. würklich aus den drei gegebenen zusammengesetzt ist; nämlich aus

23⅓ zu 40, oder, welches diesem gleich ist,			7 zu 12.
40 zu 32, oder	—	—	5 zu 4.
32 zu 38, oder	—	—	16 zu 19.

§. 104.

Wenn man Achtung giebt, wie die gesuchte Größe nach und nach zu den gegebenen Verhältnissen abgeändert wird: so wird man wahrnehmen, daß man, um die zuerst gefundenen 40 Rthlr. in 32 zu verwandeln, sie

sie in der zweiten Regeldetri 4 mahl größer machen, und den 5ten Theil des herauskommenden nehmen mußte. Man würde aber gleich in der ersten Regeldetri eine 4 mahl größere Zahl erhalten haben, wenn man den Vervielfältiger 12 mit 4 vervielfältiget, und also 48 dafür gebraucht hätte. Hätte man aber den Theiler 7 mit 5 vervielfältiget, und also an seiner Stelle 35 gebraucht, so würde der 5te Theil einer 4 mahl größeren Zahl, das ist, die Zahl 32 gleich in der ersten Regeldetri herausgekommen seyn. Um nun die 32 in 38 Rthlr. zu verwandeln, mußten sie in der dritten Regeldetri mit 19 vervielfältiget, und mit 16 getheilt werden. Hätte man aber den Vervielfältiger 48 mit 19, und den Theiler 35 mit 16 vervielfältiget: so wäre gleich der 16te Theil einer 19 mahl größeren Zahl, d. i. so wären die 38, welche man zuletzt suchte, gleich durch eine einzige Regeldetri, nämlich die folgende, herausgekommen.

7 M. — 12 M.
5 T. — 4 T.
———
35 — 48
16 Gr. — 19 Gr.
———
210 — 432
35 — 48
———
560 — — 912 — — 23$\frac{1}{3}$ Rthlr.

Woraus man sieht, daß die 38 Rthlr. die 4te Proportionalgröße zu dem Vielfachen aller ersten Glieder (560), dem Vielfachen aller zweiten Glieder (912) der gegebenen Verhältnisse, und den 23$\frac{1}{3}$ Rthlr. sind. (§. 87.)

§. 105.

Da man in ähnlichen Fällen auch eben so schließen kann: so folgt hieraus überhaupt, daß wenn zwo größen in einem zusammengesetzten Verhältnisse stehen, sie sich untereinander verhalten, wie das Vielfache aller ersten zu dem Vielfachen al-

ler zweiten Glieder dererjenigen Verhältnisse, woraus das ihrige zusammengesetzt ist.

§. 106.

Auch folgt daraus, daß wenn man eine Größe sucht, deren Verhältniß zu einer gegebenen aus mehreren Verhältnissen zusammen gesetzt ist, man nur so wohl alle ersten, als alle letzten Glieder dieser Verhältnisse mit einander vervielfältigen, und mit diesen Vielfachen, und der noch übrigen Größe eine einfache Regeldetri ausführen darf. Doch muß man vorher untersuchen, ob unter den Verhältnissen umzukehrende vorkommen (§. 98). Bei der Rechnung selbst kann man die (§. §. 99. 100.) angezeigten Vortheile oft mit Bequemlichkeit gebrauchen, welches letzte wir an dem obigen Falle zeigen wollen.

1)	7 M.	12 M.	
	5 T.	4 T.	
	16 Gr.	19 Gr.	$23\frac{1}{3}$ Rthlr.
	3		70

Hier lassen sich der erste und 2te Satz mit 4 zweimahl, ferner mit 3; der erste und 3te aber mit 5 und 7 aufaufheben, worauf weiter nichts, als in dem 2ten die 19, und in dem 3ten eine 2 übrig bleiben, deren Vielfaches die gesuchten 38 Rthlr. giebt.

2) A legt alle 2 Stunden 3 Meilen, B alle 7 St. 8 M. zurück Wenn nun beide zugleich abgehen, wie weit kommt B indessen, da A $115\frac{1}{2}$ Meile zurücklegt?

Antwort: 88 Meilen.

3) Eine Summe reicht 27 Tage lang zu um 21 Personen täglich $5\frac{1}{3}$ Gr. auszuzahlen. Wenn aber ihrer 14 täglich 9 Gr. erhalten sollen, wie lange wird sie dazu hinreichen?

Antwort: 24 Tage.

Hie-

§. 107.

Hieher gehört auch diejenige Rechnung, wodurch man Größen von einer gewissen Benennung auf eine andere Benennung bringt, deren Verhältniß zu der ersten nicht unmittelbar, sondern durch mehrere Verhältnisse bestimmt wird.

Als wenn man 128 Dukaten in holländische Gulden verwandeln wollte, und wüßte daß 8 holl. Gulden 7 Reichsgulden, 3 Rchsgld. 2 Rthlr. und $2\frac{1}{12}$ Rthlr. 1 Dukaten gelten.

§. 108.

Die gewöhnliche Art des Aufsatzes hat dieser Rechnung den Namen der **Kettenrechnung** erworben. Man nimmt nämlich die zu verwandelnde Zahl für den letzten Satz an, diejenige aber, die mit dieser eine Benennung hat, nebst der, die ihren Werth ausdrückt, machen die erste Reihe der beiden ersten Sätze aus. Die mit dieser letzten eine Benennung hat, nebst der, die ihren Werth ausdrükt, machen die zweite Reihe aus, und eben so entstehen die übrigen Reihen.

In dem angeführten Falle würde also folgende Ordnung Statt finden:

1 Duk.	$2\frac{1}{12}$ Rthlr.	128 Duk.
2 Rthlr.	3 Rchsgld.	
7 Rchsgld.	8 holl. Gld.	

§. 109.

Es ist leicht zu begreifen, daß sich die Zahl der Dukaten 128 zu der gleich viel werthen Zahl Thaler verhalten müsse wie 1 zu $2\frac{1}{12}$; diese Zahl Thaler aber zu der gleichviel werthen Zahl Rchsgld. wie 2 zu 3; und diese zu der gleichviel werthen Zahl holl. Gld. wie 7 zu 8.

Daher denn das Verhältniß der Zahl 128 zu der gleichviel werthen Zahl holl. Gld. aus den Verhältnissen 1 zu $2\frac{11}{12}$, 2 zu 3, und 7 zu 8 zusammengesetzt ist.

§. 110.

Die Ausführung dieser Rechnung ist daher mit der §. 106. beschriebenen völlig einerlei.

1. In dem angeführten Falle erhält man:

640 Holl. Gld.

2. Man will wissen, wie viel $22\frac{1}{2}$ Brabandter Ellen nach der Berliner Elle ausmachen, da 15 Holländische 16 Berliner, 105 Holländische 128 Hamburger, und 6 Hamburger 5 Brabandter Ellen betragen?

Antw. $23\frac{5}{8}$ Berl. Ellen.

3. $218\frac{5}{8}$ Rthlr. Prßl. Crt. sollen in Conventionsgelde bezahlt werden. Da die Louisd'or gegen Conventionsgeld $7\frac{1}{7}$, das Prßl. Crt. aber gegen Louisd'or 6 P C. Aufgeld geben, so frägt sich, wie viel bezahlt werden müsse?

Antw. $192\frac{1}{2}$ Rthlr.

III. Die Gesellschaftsrechnung.

§. 111.

Unter die nützlichsten Anwendungen der Regeldetri gehört auch diejenige, wodurch eine Zahl in eine verlangte Zahl Theile getheilt wird, die ein gewisses Verhältniß unter einander haben, welche man, wegen ihres Nutzens ins Handlungsgesellschaften die Gesellschaftsrechnung zu nennen pflegt.

§. 112.

Wenn dieses Verhältniß durch gewisse gegebene Zahlen bestimmt wird, die sich untereinan-

verhalten, wie die zu findenden Theile: so zählt man dieselbe zusammen, um zu sehen, was für ein Ganzes sie mit einander ausmachen. Hernach schließt man: wie dieses Ganze zu dem zu theilenden Ganzen, so jede der gegebenen Zahlen zu einem der gesuchten Theile, deren jeden man durch eine besondere Regeldetri findet.

1. 1000 Rthlr. sollen in 4 Theile getheilt werden, die sich unter einander verhalten, wie die Zahlen 4, 5, 7, 9 Man zählt diese zusammen, woraus 25 entstehen. Hernach hat man zu Findung der vier Theile folgende Sätze zu viermahliger Wiederhohlung der Regeldetri. Zur ersten: 25, 1000, 4; zur zweiten: 25, 1000, 5; zur dritten: 25, 1000, 7; und zur vierten: 25, 1000, 9. Da sich 25 und 1000 mit 25 theilen lassen, so kann man sich hierdurch die Arbeit erleichtern. (§. 99.) Man findet die Theile 160, 200, 280, 360.

2. A, B und C findet beim Jahrschlusse, daß sie in ihrer gemeinschaftlichen Handlung um 1600 Rthlr. zurückgekommen sind, und wollen den Verlust nach Verhältniß derer Kapitalien, die jeder in der Handlung hat, theilen. A hat 12640 Rthlr., B 10500, und C 3260. Wie viel büßt jeder ein?

A $766\frac{2}{33}$ Rthlr., B $636\frac{12}{33}$, C $197\frac{19}{33}$.

3. 24 Loth Arzenei haben fünferlei Zuthaten, nämlich 2 Loth A, 7 Loth B, 5 Loth C, 6 Loth D, und 4 Loth E. Wenn nun davon 16 Pfund gemacht werden sollen, wie viel wird von jeder Zuthat erfordert?

1 ℔ $10\frac{2}{3}$ Loth A, 4 ℔ $21\frac{1}{3}$ Loth B, 3 ℔ $10\frac{2}{3}$ Loth C, 4 ℔ D, 2 ℔ $21\frac{1}{3}$ Loth E.

§. 113.

Wenn das Verhältniß eines jeden Theiles zu dem nächstfolgenden besonders bestimmt wird, z. B. wenn der erste sich zum zweiten wie 7 zu 3, dieser sich zum dritten wie 5 zu 2, und dieser sich zum

vierten wie 3 zu 1 u. s. f. verhalten soll: so vervielfältigt man die beiden Glieder des ersten Verhältnisses mit dem ersten Gliede des zweiten, und die letzten Glieder beider Verhältnisse mit einander. Die hierdurch entstandene Zahlen vervielfältigt man, wenn mehrere Verhältnisse gegeben sind, mit dem ersten Gliede des folgenden, und die letzte dieser Zahlen mit seinem letzten Gliede, auf welche Art man beständig fortfährt, wenn der Verhältnisse noch mehrere sind.

Hierdurch erhält man so viele Zahlen als Theile sind, und zwar solche, wodurch das Verhältniß derselben wie vorhin, einfach bestimmt wird, daher man auch alsdenn eben so verfahren kann.

Wenn die obigen Verhältnisse gelten sollten, würde man so damit umgehen:

7.	3.		
	5.	2.	
35.	15.	6.	
		3.	1.
135.	45.	18.	6.

Man sieht leicht, daß sich jede dieser Zahlen zu der folgenden so verhält, wie jeder Theil sich zum nächstfolgenden verhalten sollte (§. 99.). Da sie sich aber alle mit 3 theilen lassen, kann man auch an ihrer Stelle die Antheile 35. 15. 6. 2. gebrauchen.

Ex. Ein Partheigänger, ein Unterofficier, ein Husar und ein Bauer haben zusammen 1537 Rthlr. erbeutet, und vergleichen sich, daß so oft der P. 7 Rthlr. oder Gr. erhält, der U. ihrer 3 nehmen, so oft dieser 5 erhält, der H. 2, und so oft dieser 3 erhält, der B. 1 haben soll. Wie viel erhält jeder? Der P. 927½ Rthlr., der U. 397½, der H. 159, der B. 53.

Dritte

Dritte Abtheilung
der
Rechenkunst,
welche
einige sonderlich in der Mathematik vorkommende Rechnungen enthält.

I. Von Decimalbrüchen.

§. 114.

Man nimmt beim Lesen der gemeinen Zahlen als ein Grundgesetz an, daß jede Ziffer in der Stelle, wo sie sich in einer Zahl befindet, zehenmal so viel gilt, als wenn sie um eine Stelle weiter gegen die Rechte, und zehenmahl so wenig, als wenn sie eben so viel weiter gegen die Linke gerückt würde. (§. 5.)

§. 115.

Wenn man nun die Stelle der Einer nicht, wie dort angenommen worden, auf die letzte Stelle einschränkt, sondern dieselbe auf andere Art, z. B. durch ein dahinter gesetztes (,) oder (.) auf diese Weise 73,504 festsetzt: so müssen die darauf folgenden Ziffern nach dem gedachten Grundsatze Brüche werden. Die erste derselben 5 wird Zehntheile, die zweite Hunderttheile anzeigen; kurz: der Nenner einer jeden folgenden Ziffer wird zehenmahl

mahl so groß als der Nenner der vorhergehenden sein. Dergleichen Brüche werden in der Mathematik mit Nutzen gebraucht, und Decimalbrüche genannt.

§. 116.

Da man sich auch hier der Nulle bedient, um die ledig bleibenden Stellen zu besetzen: so ist es leicht allerlei Decimalbrüche mit oder ohne Ganzen zu schreiben.

Z. B. $\frac{7}{10}$ und $\frac{5}{1000}$ werden geschrieben 0,705. Ferner 65 Ganze und $\frac{3}{100}$: 65,03.

§. 117.

Eben so leicht ist es geschriebene Decimalbrüche zu lesen; doch merke man, daß man entweder jede Ziffer besonders nach ihrem Werthe, oder alle zusammen nach dem Wehrte des kleinesten Bruches lesen kann.

Z. B. 36,45 können gelesen werden 36 Ganze, $\frac{4}{10}$ und $\frac{5}{100}$; oder, da die $\frac{4}{10}$ so viel sind als $\frac{40}{100}$, so kann man den Bruch zusammen als $\frac{45}{100}$ ansehen; ja da endlich die 36 Ganze $\frac{3600}{100}$ ausmachen, so läßt sich alles zusammen aussprechen $\frac{3645}{100}$.

§. 118.

Wenn man einer Zahl, in welcher die Stelle der Einer festgesetzt ist, Nullen vor oder nachsetzt: so leidet sie in Ansehung ihrer Größe dabei keine Veränderung.

Man mag schreiben 56,4; oder 0056,4; oder 56,400: so hat man allezeit 56 und $\frac{4}{10}$.

§. 119.

Rückt man aber das Zeichen (,) aus seiner Stelle: so leidet jede Ziffer, und hiermit die Zahl selbst eine Veränderung. Nämlich: rückt man es um eine Stelle gegen die Linke, so wird die Zahl zehen mahl kleiner; rückt man es eben so viel gegen die Rechte zehen mahl größer. Verrückt man es um zwo oder drei u. s. f. Stellen gegen die Linke oder gegen die Rechte: so wird die Zahl hundert, tausend u. s. f. mahl im ersten Falle kleiner, im zweiten größer.

Wenn man anstatt 123,45 schriebe: 1,2345, so würde die 1 nicht mehr Hundert sondern einfach gelten; die 2 würde aus 20 in $\frac{2}{10}$, die 3 in $\frac{3}{100}$, die $\frac{4}{10}$ in $\frac{4}{1000}$, die $\frac{5}{100}$ in $\frac{5}{10000}$ verwandelt; hiermit jede Ziffer und die Zahl selbst 100 mahl verkleinert werden. Schriebe man aber 1234,5: so würden aus den 100 nunmehr 1000; die 20 würden in 200, die 3 in 30, die $\frac{4}{10}$ in 4, und die $\frac{5}{100}$ in $\frac{5}{10}$, und also jede Ziffer und die Zahl selbst zehenmal vergrößert werden.

§. 120.

Wenn man Decimalbrüche mit oder ohne Ganzen zusammenzählen, oder von einander abzählen will: so schreibt man sie dergestalt hin, daß die Einer, und dadurch alle Ziffern von gleichem Wehrte gerade unter einander stehen; und verrichtet das übrige wie mit ganzen Zahlen. Das Zeichen (,) bleibt bei der Summe, oder dem Reste der Einer stehen.

Zusammen zu zählen.

2347,098		2347,0980
41,7659	oder	41,7659
509,83	§. 118.	509,8300
2898,6939		2898,6939

Abzu=

Abzuzählen.

$$\left.\begin{array}{r}63742{,}15\\ 894{,}6213\end{array}\right\}\text{ oder }\left\{\begin{array}{r}63742{,}1500\\ 894{,}6213\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rr}62847{,}5287 & 62847{,}5287\end{array}$$

§. 121.

Die Vervielfältigung und die Theilung der Decimalbrüche geschehen wie bei ganzen Zahlen; außer, daß die Setzung des Zeichens noch einige besondere Regeln erfordert.

§. 122.

Wenn der Vervielfältiger eine ganze Zahl ist: so bleibt das Zeichen in dem Vielfachen auf der so vielten Stelle vom Ende stehen, als es in der zu vervielfältigenden Zahl stand. S. das erste Ex.

Hat aber derselbe einige Bruchziffern: so rückt man das Zeichen in dem Vielfachen um eben so viele Stellen gegen die Linke. Denn die Vervielfältigung mit einem Bruche schließt eine Theilung mit seinem Nenner in sich. (§. 57.) S. das 2te Exempel

Erstes Exempel.	Zweites Exempel.
2, 34	19,45
16	83,2
1404	3890
234	5835
	15560
37, 44	1618,240 oder
	1618,24 (§. 118)

§. 123.

Wenn der Theiler eine ganze Zahl ist: so bleibt das Zeichen in dem Antheile auf der so vielten Stelle

vom

vom Ende, als wo es in der zu theilenden Zahl stand. S. das 1ste Exempel.

Hat aber derselbe einige Bruchziffern, so rückt man das Zeichen in dem Antheile um eben so viele Stellen gegen die Rechte, weil die Theilung mit einem Bruche eine Vervielfältigung mit seinem Nenner in sich schließt. (§. 64.) S. d. 2te Exempel. Hat aber der Antheil nicht so viele Ziffern, als zur Verrückung des Zeichens gehören würden, so ersetzt man sie mit Nullen. S. d. 3te Exempel.

Erstes Exempel.

```
16) 37,44 | 2,34
    32    |
    ---   |
     5,4  |
     4 8
     ---
      64
      64
```

Zweites Exempel.

```
83,2)1618,14 | 19,4
     832     |
     ---     |
     7862    |
     7488
     ----
      3744
      3328
      ----
       416
```

Drittes Exempel.

```
0,003)46,3 | 15400
        --
         1 |
```

Die Reste solcher Theilungen lassen sich nicht allezeit durch einfache Brüche, wie oben, (§. 40), erklären; weil ihr Werth auch durch die Werthe beider Zahlen bestimmt wird z. B. in dem 2ten Exempel ist derselbe $\frac{4,16}{83,2}$ das ist, wenn man Zähler und Nenner mit 100 vervielfältiget $\frac{416}{8320}$. In dem 3ten aber ist er $\frac{0,1}{0,003}$, welcher, wenn beide Zahlen mit 1000 vervielfältiget werden, $\frac{100}{3}$, und also 33 Ganze und $\frac{1}{3}$ gilt. Man kann diese Reste so unbeträchtlich machen, als man will, wenn man der zu theilenden Zahl Nullen anhängt (§. 118), und die Theilung fortsetzt; da man sie denn ihrer Unbeträchtlichkeit wegen aus der Acht läßt. Wobei man oft, wie auch in diesem 3ten Beispiele, ohne lange Fort-

setzung

setzung der Theilung, von selbst die in dem Antheile noch folgende Ziffern merken wird. Hier erhält man nämlich 15433, 333333 u. s. f. so weit man will. Bei 8 Nullen wäre der Rest $3\,\frac{1}{000}\,000$.

§. 125.

Man kann jeden gemeinen eigentlichen oder uneigentlichen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, wenn man dem Zähler Nullen anhängt, und das Herauskommende mit dem Nenner theilt.

Dem Herauskommenden giebt man so viele Bruchziffern, als man Nullen angehängt hat.

Da z. B. der Bruch $\frac{5}{16}$ eben so viel gilt als $\frac{5,000}{16}$ (§. 118.) so erhält man dafür 0,312. Aus $\frac{4}{5}$ oder $\frac{4,0}{5}$ werden 0,8. Aus $\frac{1}{3}$ entstehen 0,333333 u. s. f. Aus $\frac{4}{7}$ werden 0,5714285714 u. s. f., welches auch ohne Theilung leicht weiter fortgesetzt werden kann.

§. 126.

Wenn die Theilung aufgeht, so drückt der Decimalbruch den Werth des gegebenen völlig aus; wie in den beiden ersten Ex. des vorigen §.

Geht sie nie auf (wie in den andern), so kann man sich doch dem Werthe desselben so sehr nähern, als man will, und so, daß der Irrthum weniger betrage, als irgend eine Größe, die sich angeben läßt.

§. 127.

Größen, deren eine sich durch die Theile der andern nicht völlig ausdrücken laßt, nennet man Incommensurable Größen. Der Bruch $\frac{4}{7}$ ist also mit Decimalbrüchen incommensurabel. Die Mathematik giebt mehrere Beispiele solcher Größen.

Von

Von den Dignitäten der Zahlen und Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 128.

Jede Zahl ist selbst ihre erste Dignität. Wird sie aber mit sich selbst vervielfältigt, so nennet man das Vielfache ihre 2te Dignität oder ihr Quadrat. Wird das Quadrat nochmahl mit dieser Zahl vervielfältiget, so kommt ihre 3te Dignität oder ihr **Würfel** (Cubus) heraus, und so entstehen die 4te und folgende höhere Dignitäten, wenn man die vorhergehende jedesmahl noch mit der ersteren Zahl vervielfältiget.

So ist z. B. 5 mahl 5, oder 25 das Quadrat oder die 2te Dignität, der 5; 5 mahl 25, oder 125 aber der Würfel, oder die 3te Dignität derselben.

§. 129.

Die erstere Zahl nennet man in Absicht auf ihre Dignitäten die **Wurzel** derselben. Die Quadratwurzel einer vorgegebenen Zahl, ist die Zahl, welche, mit sich selbst vervielfältiget, die vorgegebene hervorbringt, ihre Cubicwurzel diejenige, welche mit ihrem Quadrat vervielfältiget, sie hervorbringt u. s. f; woraus denn leicht erhellet, was die Ausziehung der Quadrat, Cubic oder einer andern Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl zu bedeuten habe.

§. 130.

So lange eine Quadratzahl kleiner ist als 100, so ist ihre Wurzel eine einzelne Ziffer, und wird durch das Einmahleins leicht gefunden. So sieht

man z. B. leicht, daß die Quadratwurzel der 64 die 8 ist, weil 8 mahl 8 die 64 ausmachen.

§. 131.

Ist aber dieselbe größer, und hat folglich ihre Wurzel mehrere Ziffern, so ist es rathsam, daß man vorher das Gegentheil dieser Verrichtung vornehme, eine größere Zahl mit sich selbst vervielfältige, und Achtung gebe, wie ihr Quadrat aus derselben entstehe.

§. 132.

Wenn die Wurzel zwo Ziffern hat (S. unten das Ex.), so wird man wahrnehmen, daß das Quadrat in sich halte

1) das Quadrat der ersten Ziffer (64), welches als das Vielfache eines Zehners mit einem Zehner aus Hunderten besteht, und sich daher in der dritten Stelle von der Rechten endiget.

2) Das Vielfache der beiden Ziffern mit einander (48) zweimahl, welches als das Vielfache eines Zehners mit einem Einer in der vorletzten Stelle aufhört.

3) Das Quadrat der zweiten Ziffer (36), welches als das Vielfache zweener Einer sich in der letzten Stelle endiget.

86	oder	86
86		86
36		516
48 .		688
48 .		7396
64 . .		
7396		

§. 133.

Setzt man nach und nach mehrere Ziffern an die Wurzel, so wird man jederzeit finden, daß zwar alle Theile des vorigen Quadrates wieder hervorkommen, aber doch durch die zehenmalige Vergrösserung der Wurzel um zwo Stellen gegen die Linke befördert werden. Dazu kommt:

1) Das doppelte Vielfache aller ersteren Ziffern in die dazu gekommene, welches sich bis auf die verletzte Stelle erstreckt.

2) Das Quadrat der dazu gekommenen Ziffer, welches in der letzten Stelle aufhört.

```
    864
    864
  -----
    16
   24.
  32..
   24.
  36..
 48...
  32..
 48...
64....
------
746496.
```

§. 134.

Da dergestalt durch jede zu der Wurzel kommende Ziffer jeder Theil des Quadrates der vorhergehenden um zwo Stellen weiter vom Ende abgerückt wird: so sieht man, daß die Quadrate der Ziffern sich alle in den unpaaren Stellen vom Ende an gezählt, die gedachten Vielfache aber in den paaren endigen müssen; so daß wenn sich das Quadrat

einer oder etlicher Ziffern in der einen Stelle endiget, das doppelte Vielfache eben derselben mit der nächst folgenden Ziffer in der gleich darauf folgenden Stelle aufhört. Z. B. das Quadrat der 8 reicht bis in die 5te ihr doppeltes Vielfaches, mit der 6 aber bis in die 4te Stelle vom Ende.

§. 135.

Hieraus wird die folgende Art die Quadratwurzel auszuziehen leicht begreiflich. (M. S. unten das erste Exempel.)

1. Man schneidet von der vorgegebenen Zahl so oft es angeht von der Rechten gegen die Linke zu zwo Ziffern ab, und zieht hinter dieselbe einen Strich, wie bei der Theilung.

2. Alsdenn sucht man unter den im Einmahleins enthaltenen Quadraten dasjenige aus, welches der in der ersten Abtheilung befindlichen Zahl (74) am nächsten kommt, zieht es von derselben ab; seine Wurzel aber setzt man, als den ersten Theil der gesuchten Wurzel, hinter den Strich. Zu dem Reste (10) setzt man die Ziffern (64) der folgenden Abtheilung.

Hierauf verdoppelt man den gefundenen Theil (8) der Wurzel, theilt mit dem Vielfachen (16), die Zahl (106), welche die erste (6) der dazu genommenen Ziffern mit dem Reste (10) macht, und setzt den Antheil (6) nicht nur hinter den Strich als einen neuen Theil der gesuchten Wurzel, sondern auch neben den Theiler zur Rechten.

Die hierdurch entstehende Zahl (166) vervielfältiget man mit dem Antheile, zähl das Vielfache (996) von dem vorgenommenen Theile (1064) der

der Quadratzahl ab, und setzt den Rest (68) herunter.

5. Hat die vorgegebeue Zahl noch noch mehrere Ziffern, so setzt man die folgende Abtheilung (96) neben den Rest; verdoppelt den ganzen gefundenen Theil der Wurzel (86), und wendet die 3te 4te und 5te Regel so lange an, bis man alle Abtheilungen durchgegangen ist.

Wir fügen noch ein zweites Exempel bei.

Erstes Exempel.

```
       74|64|96|864
       64|  |  |
       --
       10|64
166     9|96
       -----
         68|96
1724     68|96
         -----
            0
```

Zweites Exempel.

```
        31|43|84|49|5607
        25|
        --
         6|43
106      6|36
         -----
            7|84
1120        7|84|49
11207       7|84|49
            -------
                 0
```

§. 136.

Wenn nach dieser Verrichtung von der vorgegebenen Zahl nichts übrig bleibt, so hat man ihre Quadratwurzel richtig gefunden. Bleibt aber etwas, so kann man daraus schließen, daß dieselbe keine vollkommene Quadratzahl ist, oder, daß es keine Zahl giebt, die mit sich selbst vervielfältiget, die vorgegebene hervorbringt.

§. 137.

Das Quadrat eines Bruches entsteht, wenn man so wohl seinen Zähler als seinen Nenner jeden mit sich vervielfältiget. (§. 59). Will man also aus

einem Bruche die Quadratwurzel ziehen, so muß dies aus Zähler und Nenner besonders geschehen, und aus den Wurzeln ein neuer Bruch gemacht werden. Z. B. Die Quadratwurzel von $\frac{49}{64}$ ist $\frac{7}{8}$.

§. 138.

Wenn die vorgegebene Zahl keine vollkommene Quadratzahl ist: so kann man auf die folgende Art doch die Wurzel einer solchen Zahl finden, die von ihr um so wenig, als man will, oder nöthig findet unterschieden sei. Man hängt nämlich der vorgegebenen Zahl ein oder etliche Paar Nullen an, und betrachtet sie hernach als einen Bruch, dessen Nenner eine 1 mit eben so vielen Nullen wäre, und aus welchem man die Wurzel zu ziehen hätte. War derselben ein Paar, so besteht die Wurzel hernach aus Zehentheilen, waren es zwei Paar, aus Hunderttheilen u. s. f. (§. 137). Wenn man z. B. aus der 3 die Quadratwurzel ziehen wolte, so betrachtet man sie als $\frac{300}{100}$ oder $\frac{30000}{10000}$ oder $\frac{3000000}{1000000}$ und zieht aus Zähler und Nenner die Wurzel.

§. 139.

Am bequemsten läßt sich dieses durch die Decimalbrüche ausführen. Man zieht nämlich zuerst aus der vorgegebenen Zahl die Wurzel (§. 135.) Hinter diese setzt man das (,), und hängt hernach jedesmahl dem Reste die Nullen paarweise an; alsdenn erhält man für das erste Paar derselben die Zehentheile, für das zweite die Hunderttheile u. s. f. der Wurzel, welche Arbeit man nach Belieben fortsetzt.

Z. B. Um aus der 3 die Quadratwurzel zu ziehen, macht man es so

```
    3 | 1,73 u. s. f.
    1
   ---
    2|00
27  1|89
   -----
    11|00
    10|29
   ------
343    71 u. s. f.
```

§. 140.

Wenn die Quadratwurzel einer ganzen Zahl nicht durch eine ganze gefunden wird: so läßt sie sich auch durch Brüche nie vollkommen finden. Denn man merkt leicht, daß ein Bruch mit einem Bruche vervielfältiget auch wieder einen Bruch hervorbringen muß.

§. 141.

Eine Wurzel, welche sich nicht vollkommen finden finden läßt, nennet man eine Irrationalzahl. Z. B. die Quadratwurzel von 8 ist irrational. Jede Irrationalzahl ist daher zwar ihrem Quadrat incommensurabel (§. 127); aber nicht jede einer andern incommensurable Größe irrational.

§. 142.

Wenn sich eine Größe zu der zweiten verhält, wie eben diese zu einer dritten: so schreibt man diesen drei Größen eine stete Proportion zu. Dergleichen findet z. B. zwischen den Zahlen 4. 12. 36. Statt.

§. 143.

Wenn drei Zahlen in einer steten Proportion stehen: so ist das Vielfache der 1ten und 3ten dem Quadrat der mitleren gleich. (§. 85.)

Z. B. 4 mahl 36 macht 144, und eben so viel macht 12 mahl 12.

§. 144.

Wenn man also zwischen zwoen Zahlen eine mittlere stete Proportinalzahl sucht, so darf man dieselben nur mit einander vervielfältigen, und aus dem Vielfachen die Quadratwurzel ziehen, welche die gesuchte Zahl ist.

§. 145.

Zu Ausziehung der Cubicwurzel und anderer höhern Wurzeln lassen sich zwar die Regeln auch auf eine ähnliche Art finden. Da aber dieses nicht ohne Weitläuftigkeit geschehen könnte, so versparen wir das nöthigste davon auf eine andere Gelegenheit.

III. Von der Arithmetischen Progreßion.

§. 146.

Eine Reihe Zahlen, welche nach einem gewissen Gesetze auf einander folgen, nennet man eine Progreßion. Es giebt also so mancherlei Progreßionen, als sich dergleichen Gesetze denken lassen. Man nennet sie eine Arithmetische Progreßion, wenn die folgenden Glieder von den vorhergehenden allezeit um gleich viel unterschieden sind; und zwar eine Steigende, wenn sie von kleineren zu grösseren Gliedern übergeht. Z. B. 2. 5. 8. 11. 14. eine Fallende, wenn kleinere auf größere folgen. Z. B. 14. 11. 8. 5. 2.

§. 147.

Wenn man irgend ein Glied von dem nächst größern abzählt, so findet man den Unterschied der Glieder. Z. B. 2 von 5, oder 5 von 8 lassen jederzeit 3 übrig. Zieht man ein Glied von dem zweiten, dritten, u. s. f. der darauf folgenden größeren Glieder ab, so erhält man auch den Unterschied im ersten Falle doppelt, im zweiten dreifach u. s. f. Zieht man das kleineste von dem größesten ab, so erhält man den Unterschied so viel mahl genommen als Glieder sind, ohne eins. Z. B. 2 von 14 lassen 12; der Glieder sind 5, und 12 ist der 4fache Unterschied derselben.

§. 148.

Will man aus irgend einem Gliede das nächst größere oder kleinere finden, so zählt man den Unterschied in dem ersteren Falle dazu, im zweiten davon ab. Sucht man das 2te 3te u. s. f. der darauf folgenden größern oder kleinern Glieder, so zählt man den Unterschied eben so vielmahl genommen, im ersten Falle zu dem gegebenen Gliede in dem zweiten von demselben ab; und sucht man aus dem kleinesten das größte, oder aus diesem jenes, so nimt man den Unterschied so vielmahl als Glieder ohne eines sind, und zählt das herauskommende dem kleinesten zu oder von dem größesten ab.

Z. B. Wenn man oben aus der 2 die 14 sucht, so zählt man, weil 5 Glieder in allen sind, der 2 den 4fachen Unterschied d. i. 12 zu; welche Zahl man hingegen von 14 abzuzählen hätte, wenn man durch sie die 2 suchte.

§. 149.

Wenn das größeste und keineste Glied nebst der Zahl derselben gegeben sind: so ist es leicht ein jedes Glied zu finden. Man sucht nämlich den Unterschied (§. 147), und dadurch die Glieder.

Z. B. Eine Arithmetische Progreßion, deren größtes und kleinestes Glied 2 und 17 sind, soll 11 Glieder haben.

17	11
2	1
15	10) 15 | 1½ Unterschied der Gl.
	5 | 2 Erstes Glied.
	3½ Zweites Glied.

Worauf man die andern 5, $6\frac{1}{2}$, 8, $9\frac{1}{2}$, 11, $12\frac{1}{2}$, 14, $15\frac{1}{2}$ durch Zuzählung des Unterschiedes leicht findet.

§. 150.

Sucht man aus dem größesten und kleinesten Gliede und dem Unterschiede die Zahl der Glieder so zählt man das keineste von dem größten ab, theilt den Rest mit dem Unterschiede und zählt dem Antheile 1 zu. (§. 147.)

Als in dem letzteren Beispiele würde man, wenn die 2, die 17, und der Unterschied $1\frac{1}{2}$ gegeben wären, 2 von 17 abzählen, den Rest 15 mit $1\frac{1}{2}$ theilen, und dadurch 10 zum Antheil erhalten. Da aber die 15 den Un-Unterschied einmahl weniger als Glieder sind enthalten, (§. 147.) so muß man der Zahl 10 noch 1 zuzählen.

§. 151.

Wenn man das größte Glied mit dem kleinesten zusammenzählt, so kommt eben so viel heraus, als wenn man jede zwei andre Glieder, welche von ihnen gleich weit abstehen zusammenzählt, und doppelt so viel als das mittelste Glied, wenn ihre Zahl unpaar

paar ist. So viel nämlich das eine kleiner ist, als das nächst größere, so viel ist andere größer, als das nächst kleinere. Man mag z. B. 2 mit 17 oder $3\frac{1}{2}$ mit $15\frac{1}{2}$ oder 5 mit 14 u. s. f. zusammenzählen, so müssen allezeit 19 entstehen.

§. 152.

Sucht man die Summe aller Glieder der Progreßion, so darf man daher nur die Summe des größten und kleinesten mit der halben Zahl aller Glieder, oder die halbe Summe des größten nnd kleinesten mit der ganzen Zahl derselben vervielfältigen.

In der obigen Progreßion war die Summe des größesten und kleinesten Gliedes 19; ihre Zahl 11. Also ist ihre Summe 19 mahl $\frac{11}{2}$ oder $\frac{19}{2}$ mahl 11, das ist: $104\frac{1}{2}$

§. 153.

Wenn hier das größte oder kleineste Glied fehlte, an dessen Stelle aber aber der Unterschied der Glieder gegeben wäre, so müßte man vorher das fehlende Glied suchen, (§. 148), und alsdenn eben so verfahren.

Z. B. Wenn man die Summe der 10 ersten unpaaren Zahlen suchte, so ist das kleineste Glied 1, der Unterschied 2, die Zahl der Glieder 10.

	10 Z. d. Gl.	19 Letztes Glied.
	1 davon	1 Erstes Glied.
§. 148.	9	2) 20
	2 Unterschied.	10 Halbe Summe.
	18	10 Zahl der Glieder.
	1 Gl.	100 Gesuchte Summe
	19 letztes Gl.	

IIII. Von der Geometrischen Progreßion.

§. 145.

Wenn eine Reihe Zahlen in steter Proportion (§. 142.) fortgeht, so nennet man sie eine Geometrische Progreßion. Z. B. 2. 6. 18. 54. 162 oder 162. 54. 18. 6. 2. Sie heißt ebenfalls steigend oder fallend, je nachdem sie von kleineren zu größeren, oder von größeren zu kleineren Gliedern schreitet.

§. 155.

Wenn man ein Glied durch das nächst kleinere theilt, so kommt der Verhältnißzeiger heraus. (§. 83). Theilt man es aber durch 2te 3te u. s. f. der folgenden oder vorhergehenden kleineren Glieder, so erhält man die eben so vielte Dignität des Verhältnißzeigers. Theilt man das größte durch das kleinste Glied, so erhält man die so vielte Dignität des Verhältnißzeigers als Glieder sind weniger eins.

Z. B. 6 durch 2, oder 54 durch 18 getheilt, geben den Verhältnißzeiger 3; 18 durch 2 geben 9, die 2te Dignität desselben; 162 durch 2 aber 81, die 4te Dignität der 3, da der Glieder 5 sind.

§. 156.

Sucht man aber aus irgend einem Gliede das nächst größere, so vervielfältiget; sucht man das nächst kleinere, so theilt man dieses Glied mit dem Verhältnißzeiger. Sucht man aber das 2te 3te u. s. f. größere oder kleinere, so vervielfältiget man im ersten, und theilt im zweiten Falle das gegebene

mit

mit der oben so vielten Dignität des Verhältnißzeigers. Sucht man aus dem kleinesten das größte, oder aus dem größten das kleineste, so nimt man die so vielte Dignität des Verhältnißzeigers als Glieder sind weniger eins, und vervielfältiget im ersten, oder theilt im andern Falle das gegebene Glied damit.

Z. B. Sucht man aus der 2 das 3te größere Glied, so vervielfältiget man dieselbe mit 27, der 3ten Dignität der Verhältnißzeigers 3, und erhält 54: wie man dagegen aus dieser die 2 durch die Theilung mit eben der 27 findet. Sucht man aus der 2 die 162, oder aus dieser jene, so braucht man dazu 81, die 4te Dignität des Verhältnißzeigers, da der Glieder 5 sind.

§. 157.

Wenn man aus dem größten und kleinesten Gliede und dem Verhältnißzeiger die Zahl der Glieder sucht: so theilt man das größte durch das kleineste, da denn der Antheil, die so vielte Dignität des Verhältnißzeigers ist, als Glieder sind, weniger eins. Man theilt diese Zahl, und hernach den gefundenen Antheil mit dem Verhältnißzeiger, und jederzeit den gefundenen Antheil von neuen mit eben dem Verhältnißzeiger, so lange, bis man 1 zum Antheile erhält. Die Zahl der geschehenen Theilungen vermehrt man um 1; so hat man die Zahl der Glieder.

Verh. Zeig.

Z. B. Kleinestes Größtes Gl. 3 3 3 3

Glied. 2) 162|81|27|9|3|1

4 Theilungen

1

5 Glieder.

Unten

Unten wird hierzu ein bequemeres Mittel angewiesen werden.

§. 158.

Jedes Glied einer Geometrischen Progreßion entsteht, wenn man die Summe aller vorhergehenden oder oder folgenden kleineren durch den um 1 verminderten Verhältnißzeiger vervielfältiget, und zu dem Vielfachen das kleineste Glied zählt. Das größte also durch die gedachte Vervielfältigung aller übrigen und Zuzählung des kleinesten.

Wenn man das kleineste Glied (Wir beziehen uns noch auf die obige Progreßion, also die 2) mit dem um 1 verminderten Verhältnißzeiger vervielfältiget, (mit 2), und eben dieses Glied nochmals zuzählt, so hat man es mit dem ganzen Verhältnißzeiger (3) vervielfältiget, wodurch das 2te Glied (6) entstehen muß. (§. 156.)

Wenn man die Summe (8) der beiden ersten 2 nnd 6) mit dem um 1 verminderten Verhältnißzeiger vervielfältiget, so ist es eben das, als wenn man es mit jeder von ihnen besonders thäte, und die Vielfache zusammenzählte. Geschähe es mit dem zweiten (6) allein, so würde es zu Hervorbringung des dritten einmahl zu wenig genommen. Aber es wird durch dasjenige, was mit dem ersten geschieht, noch einmahl hervor gebracht Also entsteht auf diese Weise das dritte Glied. (18). Welche Schlüße leicht fortzusetzen sind. Kurz: jedes Glied wird zwar bei der gedachten Vervielfältigung zu hervorbringung des folgenden einmahl zu wenig genommen; aber es entsteht noch einmahl durch Vervielfältigung der vorhergehenden kleineren, und Zuzählung des kleinesteu.

§. 159.

Daher muß auch hinwiederum aus dem größten Gliede die Summe aller kleineren entstehen, wenn

wenn man von demselben das kleineste abzählt, und den Rest durch den um 1 verminderten Verhältnißzeiger theilt.

Wenn man zum z. B. von 162 die 2 abzählt, und den Rest 160 durch 2 theilt, so entstehen 80, welches die Summe von 54, 18, 6 und 2 ist.

§. 160.

Hierdurch gelangt man in den Stand die Summe aller Glieder einer Geometrischen Progreßion zu finden, wenn das größte und kleineste Glied, nebst dem Verhältnißzeiger, gegeben sind. Nämlich:

Man zählt von dem Verhältnißzeiger 1, von dem größten Gliede aber das kleineste ab. Den letzteren Rest theilt man durch den ersteren, und zählt den Antheil dem größten Gliede zu.

Z. B. Das kleineste Glied sei 81 das größte 59049, der Verhältnißzeiger 9

9	59049	
1	81	
8	8) 58968	7371
		59049
	Summe d. Progr.	66420

§. 161.

Ist aber hierzu, anstatt des größten oder kleinesten Gliedes, die Zahl der Glieder gegeben, so sucht man vorher das unter beiden fehlende Glied (§. 156), und verfährt hernach angezeigter Maaßen.

Z. B. Es verkauft jemand einen mit zwölf Obstbäumen besetzten Platz, unter der Bedingung, daß er den Platz mit dazu gehörigem Hause oben ein geben will, wenn

wenn ihm der Käufer den ersten Baum mit 1 Rthlr., den 2ten mit 2, den 3ten mit 4 Rthlr. u. s. f in Geometrischer Progreßion bezahlt. Wie viel erhält er auf die Weise?

Verhältnißz.	2	2048	11te Dign. d Vhßz.
	2	1	und 12tes Glied
2te Dignit	4	2047	Summe der übrigen Glieder.
	4		
4te	16	4095	Rthlr. Summe der Progr.
	16		
	96		
	16		
8te	256		
3te	8		
11te	2048		

§. 162.

Man setze daß eine Reihe Brüche in einer fallenden Geometrischen Progreßion bis ins unendliche fortgehe, als

1) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ u. s. f.

2) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{81}$ u. s. f.

Man sucht ihre Summe.

Da das kleineste Glied in solchen Fällen kleiner ist als irgend eine Größe, die sich angeben ließe: so wird das erste als das größeste durch Abzählung desselben um weniger als man sagen kann, das ist um gar nichts verringert, und darf man dieses nur durch den um 1 verminderten Verhältnißzeiger theilen, und zu dem Antheile eben dieses Glied zählen.

Erstes Exempel.		Zweites Exempel	
1stes Gl.	$\frac{1}{2}$	1stes Gl.	$\frac{1}{3}$
getheilt mit	1	getheilt mit	2
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$
1stes Gl.	$\frac{1}{2}$	1stes Gl.	$\frac{1}{3}$
	1 S. d. 1sten Reihe.		$\frac{1}{2}$ S. d. 2ten R.

V. Von den Logarithmen.

§. 163.

In einer Geometrischen Progreßion ist das Verhältniß eines jeden Gliedes zu dem nächst folgenden überall gleich, und z. B. so groß, als das Verhältniß des ersten Gliedes zum zweiten. Dieses nennet man das einfache Verhältniß der Progreßion.

Z. B. In der Progreßion 1. 4. 16 64. 256. 1024. ist das Verhältniß 1 zu 4 oder, welches diesem gleich ist 64 zu 256 das einfache Verhältniß.

§. 164.

Das Verhältniß eines jeden Gliedes zu dem 2ten, 3ten u. s. f. der darauf folgenden ist ebenfalls überall gleich. Der Verhältnißzeiger ist im ersten Falle das Quadrat, im 2ten der Würfel u. s. f. des zu dem einfachen Verhältnisse gehörigen. Das Verhältniß eines jeden Gliedes zu dem 2ten der darauf folgenden nennet man das zwiefach vervielfältigte, das zu dem 3ten das dreifach vervielfältigte der Progreßion u. s. f. (Ratio duplicata, triplicata. u. s. f.)

Z. B. Das Verhältniß 1 zu 64 oder 16 zu 1024 ist das dreifach vervielfältigte. Der Verhältnißzeiger

ist 64, der Würfel von 4, der zu dem einfachen gehört. (§. 83.)

§. 165.

Setzt man aber zwischen zwei Glieder der Progreßion eine mitlere Proportionalzahl (§. 144), so ist das Verhältniß des vorhergehenden Gliedes zu ihr, oder ihres zu dem nächst folgenden Gliede das zwiefach getheilte der Progreßion (Ratio subduplicata.)

Setzte man ihrer zwo darzwischen, so ist das Verhältniß des vorhergehenden Gliedes zu der ersten von ihnen, der ersten ihres zur zweiten, oder dieser ihres zu dem folgenden Gliede das dreifach getheilte, (R. Subtriplicata.) u. s. f. Der Verhältnißzeiger wird im ersteren Falle die Quadratwurzel, im andern die Cubikwurzel des einfachen Verhältnißzeigers. u. s. f.

Wenn man z. B. in der obigen Progreßion zwischen jede zwei Glieder eine mitlere Proportionalzahl setzte, auf die Weise: 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256 u. s. f. so wäre das Verhältniß der 4 zu 8 oder 8 zu 16 das zwiefach getheilte; der Verhältnißzeiger 2, die Quadratwurzel der 4.

§. 166.

Die Logarithmen setzen allezeit eine geometrische Progreßion voraus, welche mit der 1 anfängt. Sie selbst sind die Zahlen welche anzeigen, wie das Verhältniß der 1 zu einer jeden, so wohl der anfangs angenommenen, als der darzwischen gesetzten Zahlen aus dem einfachen Verhältnisse der Progreßion durch die Vervielfältigung, oder Theilung, oder beides entstehe. Sie fallen also nach

Ver-

Verschiedenheit dieser Progreßion selbst verschiedentlich aus.

Gälte die obige Progreßion, so würde eines jeden Gliedes Logarithme die darunterstehende Zahl sein.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024.
0. $\frac{1}{2}$ 1. $\frac{3}{2}$ 2. $\frac{5}{2}$ 3. $\frac{7}{2}$ 4. $\frac{9}{2}$ 5.

§. 167.

Man kann bei der Vervielfältigung jederzeit das Verhältniß der 1 zu dem Vielfachen als ein aus denen von der 1 zu der vervielfältigten Zahl, und von dieser zu dem Vielfachen zusammengesetztes betrachten. Das leztere aber ist nothwendig dem von der 1 zu dem Vervielfältiger gleich, weil nämlich die vorgegebene Zahl so viel genommen werden muß, als jener 1 enthält. Daher ist das Verhältniß der 1 zu dem Vielfachen aus den Verhältnissen eben derselben zu einer jeden der mit einander vervielfältigten Zahlen zusammengesezt.

Z. B. wenn 5 durch 3 vervielfältiget werden, so ist das Verhältniß der 1 zu 15 aus denen von 1 zu 5 und 5 zu 15 zusammengesetzt. Daß von 5 zu 15 aber ist nach dem Begriffe der Vervielfältigung dem von 1 zu 3 gleich.

§. 168.

Wenn zwo Zahlen mit einander vervielfältiget werden, so muß daher der Logarithme des Vielfachen gefunden werden, wenn man beider Zahlen Logarithmen zusammen zählt.

Z. B. Wenn 8 mit 64 vervielfältiget werden, so entstehen 512. Da nun das Verhältniß der 1 zu dieser aus dem $\frac{3}{2}$fachen und 3fachen zusammengesetzt ist, so

muß es das $4\frac{1}{2}$fache oder $\frac{9}{2}$fache, und der Logarithme dieser Zahl $\frac{9}{2}$ sein.

§. 169.

Die Theilung dient, um ein Vielfaches in die Zahlen, durch deren Vervielfältigung es entsteht, zu zergliedern. (§. 34.) Der Logarithme der zutheilenden Zahl muß daher die beiden Logarithmen des Theilers und des Antheiles in sich halten; und muß der letztere gefunden werden, wenn man den Logarithmen des Theilers von der zu theilenden Zahl ihrem abzählt.

Wenn man $\frac{7}{2}$, den Log. von 128, von 5 dem Log. von 1024 abzählt, so bleiben $\frac{3}{2}$, der Log. von 8, welche 8 der Antheil von 1024 durch 128 getheilt, ist.

§. 170.

Der Logarithme des Quadrates einer Zahl muß doppelt so groß als der ihrige; (§. 168.) und dagegen der Logarithme der Quadratwurzel halb so groß als der Zahl ihrer sein.

Der Logarithme des Würfels einer Zahl ist dreimahl so groß, als der ihrige; und daher der Logarithme der Cubicwurzel einer Zahl der dritte Theil ihres Logarithmen.

Eben so läßt sich leicht auf die höheren Dignitäten fortschließen.

§. 171.

Wenn man zwischen zwoen Zahlen eine mitlere Proportionalzahl sucht: so geschieht dieses durch Vervielfältigung dieser Zahlen, und Ausziehung der Quadratwurzel aus dem Vielfachen. (§. 144.) Zählt man also die Logarithmen der ersteren zusammen,

men, so hat man des Vielfachen seinen (§. 168.), und nimmt man von diesem die Hälfte, so hat man den Logarithmen der mitleren Proportionalzahl. (§. 170.)

§. 172.

Die Briggischen Logarithmen, welche in den gewöhnlichen Tafeln enthalten sind, gehören zu den von 1 bis 10000 in natürlicher Ordnung folgenden Zahlen; hernach auch zu größern in der Trigonometrie vorkommenden, welche aber nicht auf einander folgen. Die Progression, worauf sie sich gründen ist diese: 1. 10. 100. 1000 u. s. f. Daher 1 der Logar. von 10, 2 der von 100, 3 der von 1000 u. s. f. ist.

§. 173.

Um aber die Logarithmen derer ganzen Zahlen, welche zwischen die angenommenen fallen, zu finden, hat man z. B. zwischen 1 und 10 eine mittlere Proportionalzahl, und zwischen dieser und den ersteren, imgleichen zwischen den gefundenen selbst von neuen mittlere Proportionalzahlen gesucht. Da sich aber diese nicht vollkommen finden lassen, so hat man jeder der Zahlen 1 und 10 vorher 8 Nullen angehängt, damit die Zahl, woraus die Quadratwurzel zu ziehen war, 16 Stellen Decimalbrüche erhielte (§. 138.); von den gefundenen Zahlen aber nur diejenigen beibehalten, welche von denen ganzen, die man suchte, um so kleine Brüche unterschieden waren, daß man sie ohne merklichen Fehler an ihrer Stelle brauchen konnte.

§. 174.

Die Logarithmen dieser mitleren Proportionalzahlen sind nach §. 171. gesucht worden. Doch hat man die Logarithmen solcher Zahlen, die aus andern, deren Logarithmen man schon hatte, durch die Vervielfältigung, Theilung, Ausziehung der Wurzeln, oder Erhebung auf höhere Dignitäten entstehen, bequemer finden können (§. §. 168—170). Da sich aber die Logarithmen

 selbst

selbst nicht ohne Brüche hätten finden lassen, so hat man denselben ebenfalls Nullen angehängt, damit man dabei keiner andern als der Decimalbrüche bedürfte. Wie denn in den Logarithmentafeln blos die Zahl, welche vor dem Punkt steht, Ganze, die übrigen Ziffern aber alle Decimalbrüche sind.

§. 175.

Man nennet diese ganze Zahl die Kennziffer des Logarithmen, weil man daraus abnehmen kann, ob die dazu gehörige Zahl zwischen 1 und 10, 10 und 100, 100 und 1000 u. s. f. falle.

§. 176.

Den Gebrauch der Logarithmen hat man schon aus §. §. 168 — 171 lernen können. Nämlich:

1) Wenn man zwo Zahlen mit einander vervielfältigen soll, darf man nur ihre Logarithmen zusammenzählen, und die Summe unter den Logarithmen aufsuchen, da denn die dabei befindliche Zahl das Vielfache ist. (§. 168.)

Z. B. 269 sollen mit 35 vervielfältiget werden

Log. 269.	2.4297523
Log. 35.	1.5440680
	3.9738203. Log. 9415

Also ist 9415 das Vielfache.

2) Soll man eine Zahl durch die andere theilen, so zählt man den Logarithmen des Theilers von der zu theilenden Zahl ihrem ab; der Rest ist der Logarithme des Antheils. (§. 169.)

Z. B. 7918 sollen mit 37 getheilt werden

Log. 7918.	3.8986155
Log. 37.	1.5682017
	2.3304138. Log. 214.

Daher ist der Antheil 214.

3) Soll

3) Soll man eine Zahl auf eine verlangte Dignität erheben, so vervielfältigt man ihren Logarithmen mit dem Dignitätszeiger, oder der Zahl, welche anzeigt, die wie vielte sie sein solle. Das herauskommende ist der Logarithme der gesuchten Zahl. (§. 170.)

Z. B. Man sucht die 8te Dignität der 3.

Log. 3.	0.4771213	
	8	
	3.8169704	Log. 6561

Also ist 6561 die gesuchte 8te Dignität der 3.

4) Soll man hingegen aus einer gegebenen Zahl die Wurzel einer verlangten Dignität ziehen, so theilt man den Logarithmen der Zahl mit dem Dignitätszeiger, und erhält dadurch den Logarithmen der Wurzel. (§. 170.)

Z. B. Man sucht die Wurzel der 7den Dignität von 2187.

Log. 2187.	3.3398488	
	7) 0.4771212	Log. 3.

Also ist 3 die gesuchte Wurzel.

5) Wenn man zu 3 Zahlen die 4te Proportionalzahl sucht, so zählt man die Logarithmen der beiden letzten zusammen, und den Logarithmen der ersten von der Summe ab. Der Rest ist der Logarithme der gesuchten Zahl.

Z. B. Man sucht die 4te zu 9876, 4938 und 8192.

Log. 4938.	3.6935511	
— 8192.	3.9133899	
	7.6069410	
— 9876.	3.9945811	
	3.6123599.	Log. 4096.

Die 4096 ist also die gesuchte Zahl.

6) Den Nutzen, welchen die Logarithmen beiden Geometrischen Progressionen leisten, wollen wir noch in einigen Fällen insbesondere zeigen.

§. 177.

Wenn man zwischen zwoen Zahlen eine gewisse Anzahl mittlerer Proportionalzahlen sucht: so zählt man den Logarithmen des kleinesten Gliedes von des größten seinem ab, und theilt den Rest durch die um 1 verminderte Zahl aller, oder die um 1 vermehrte Zahl der gesuchten Glieder. (§. 155 und 176. N. 2. und 4.) Den Rest zählt man zuerst zu dem Logarithmen des kleinesten Gliedes, hernach zu dem herauskommenden, welches letztere man wiederholt, bis man so viel Logarithmen, als Glieder gesucht werden dadurch herausgebracht. Diese weisen nämlich die Glieder selbst an. (§. 156. und 176. N. 1.)

Z. B. Man sucht 6 mittleren zwischen 128 und 2187.

Log. des größten Glied. —	3.3398488
— — kleinesten — —	2.1072100
— der 7den Dign. des Verhältnzgs.	1.2326388
— des Verhältnißzeigers 7)	0.1760912
— des kleinesten Gliedes —	2.1072100
— — 2ten Gliedes —	2.2833012
— — Verhältnißzeigers —	0.1760912
— — 3ten Gliedes —	2.4593924
— — Verhältnißzeigers —	0.1760912
— — 4ten Gliedes —	2.6354836
	u. s. f.

Das 2te Glied ist demnach 192, das 3te 288, das 4te 432, u. s. f.

§. 178.

§. 178.

Gesetzt man suchte aus dem kleinesten und größten, nebst noch einem Gliede, welches an eines der ersteren gränzt, die Zahl der Glieder: so zählt man unter den Logarithmen der an einander gränzenden Glieder den kleineren von dem größeren ab; auch zählt man des kleinesten Gliedes Logarithmen von des größten seinem ab. Den letzteren Rest theilt man durch den erstern, und zählt zu dem Antheile 1; so hat man die Zahl der Glieder.

Ist aber an statt des Gliedes, welches an eines der äußersten gränzet der Verhältnißzeiger gegeben, so hat man der ersteren Abzählung nicht nöthig, und nimmt den Logarithmen desselben zum Theiler des andern Restes.

Z. B. Einer der 4096 Rthlr. Capital besitzt, findet Gelegenheit, es so unter zu bringen, daß es nach Verlauf eines Jahres auf 5120 Rthlr angewachsen ist. Auf das Versprechen, daß es ihm jederzeit verhältnißmäßig eben so viel einbringen soll, entschließt er sich, es so lange stehen zu lassen, bis es auf 10000 Rthlr. angewachsen ist. Wie lange hat es alsdann von Anfang ausgestanden?

Log. des nächst kleinesten Glieds		3.7092700	
— — kleinesten	—	3.6123599	
		0.0969101	
— — größten	—	4 0000000	
— — kleinesten	—	3.6123599	
	0.0969101)	0.3876401	4
			1
			5

Die Progression hat 5 Glieder. Da aber der erste Termin, da die 4096 Rthlr. ausgethan wurden, in

Berechnung der Jahre nicht mit gilt, so steht dasselbe in allem 4 Jahr aus.

§. 179.

Wenn man aus dem ersten Gliede, dem Verhältnißzeiger und der Zahl der Glieder das letzte Glied sucht: so vervielfältigt man den Verhältnißzeiger mit der um 1 verminderten Zahl der Glieder, und zählt dieses Vielfache, entweder zu dem Logarithmen des ersten Gliedes, oder davon ab; je nachdem das erste Glied das kleineste, oder das größte ist. Das herauskommende ist der Logarithme des gesuchten Gliedes.

Z. B. 100 Rthlr. haben 14 Jahre lang zu 5 p. C. mit der Bedingung ausgestanden, daß die Zinsen vierteljährlich zum Capital geschlagen werden. Wie viel hat der Schuldner zu zahlen?

Da 5 Rthlr. der 20ste Theil von 100 sind, so machen die vierteljährliche Zinsen den 80sten Theil des Capitals aus, und ist dasselbe zu Ende jedes Vierteljahres $\frac{81}{80}$ mahl so viel als im Anfange desselben wehrt. Also ist $\frac{81}{80}$ der Verhältnißzeiger; und die Progression hat 57 Glieder, weil 14 Jahre 56 Vierteljahre haben.

Log 81.	1.9084850	Zahl des Gl.	57
— 80.	1.9030900		1
Log. d. Verhältnzgs.	0.0053950		— 56
	56		
	0.0323700		
	26975		
	0.3021200		
Log. des kl. Gl.	2.0000000		
	2.3021200 zunächst an 200.		

Er hat zwischen 200 und 201 Rthlr. zu zahlen.

§. 180.

§. 180.

Wenn die Kennziffer des herausgebrachten Logarithmen kleiner als 3 ist: so kann man sich zu genauerer Findung der dazu gehörigen Zahl des Vortheils bedienen, daß man denselben unter der 3 mit übrigens eben denselben Ziffern aufsucht; nur hat man dabei zu bemerken, daß die dazu gehörige Zahl Zehentheile, Hunderttheile oder Tausendtheile dererjenigen Größen, wovon die Rede war, enthält, je nachdem man die Kenntziffer um 1, 2 oder 3 vergrößert hat. Es ist nämlich eben dasselbe, als wenn man den Logarithmen von 10, 100, oder 1000 zu dem andern gezählet (§. 172.), und also die dazu gehörige Zahl mit 10, 100, oder 1000 vervielfältiget hätte. (§. 176. N. 1.)

Wenn man z. B. im vorigen §. den herausgebrachten Logarithmen mit Veränderung der Kennziffer 2 in 3 aufschlägt, so findet man dabei die Zahl 2005, welche hier $\frac{2005}{10}$ oder 200,5 Rthlr. d. i. 200 Rthlr. 12 Gr. anzeigt.

§. 181.

Ist aber die herausgebrachte Kennziffer selbst schon eine 3, oder noch größer: so kann man die dazu gehörige Zahl auf 5, 6 höchstens 7 Ziffern folgender Maassen, zwar nicht mit völliger, doch aber zu der gewöhnlichen Ausübung hinreichenden Genauigkeit, finden.

Man sucht unter der Kennziffer 3 in den Tafeln die Logarithmen auf, zwischen welche der herausgebrachte, seine Kennziffer aus der Acht gesetzt, fällt. Die beiden dazu gehörige Zahlen sind, wenn die Kennziffer 3 bleibt, um 1 unterschieden; ist dies:

diese eine 4, so sind die dazu gehörige Zahlen zehn mahl größer, folglich um 10 unterschieden. So sieht man leicht, daß wenn die Kennziffer eine 5 ist, die Zahlen um 100, und wenn sie eine 6 ist, um 1000 unterschieden sind. In allen diesen Fällen kann man den Zahlen der Tafeln 3 Nullen anhängen, sie hiermit tausend mahl vergrößern und ihren Unterschied als 1000 betrachten; nämlich als $\frac{1000}{1000}$, wenn die Kennziffer des herausgebrachten Logarithmen eine 3 ist; als $\frac{1000}{100}$, wenn sie 4; als $\frac{1000}{10}$ wenn sie eine 5; und als 1000, wenn sie eine 6 ist.

Man zählt den nächst kleineren Logarithmen so wohl von dem nächst größern in den Tafeln, als von dem herausgebrachten ab; und schließt hernach: wie der erstere Unterschied zu dem zweiten, so 1000, der Unterschied der zu den ersten Logarithmen gehörigen Zahlen, zu den 3 Ziffern, welche den Unterschied der gesuchten Zahl von der kleineren in den Tafeln ausmachen, welche Ziffern man also durch die Regeldetri findet, und in der kleinern Zahl an die Stelle der 3 angehängten Nullen setzt. Man giebt der herauskommenden Zahl 3, 2, 1 oder gar keine Bruchziffer, je nachdem die Kennziffer eine 3, 4, 5 oder 6 war.

Z. B. Man sucht die zu dem Logarithmen 5. 6916087 gehörige Zahl; so sind der nächst kleinere und größere unter der Kennziffer 3 folgende 3. 6915235 und 3. 6916119, deren jener zu der Zahl 4915, dieser zu 4916 gehört. Unter der Kennziffer 5 würden sie zu 491500 und 491600 gehören, welche um 100 oder $\frac{1000}{10}$ unterschieden sind daher:

```
5.6916119        5.6916087
5.6915235        5.6915235
---------        ---------
  884    —   —     852  —  1000
 884) 852000|963
      7956  |
      ----
      5640
      5304
      ----
      3360
```

Also ist die Zahl 491596,3. Hätte der herausgebrachte Logarithme die Kennziffer 3 gehabt, so wäre dieselbe 4915,963. u. s. f.

§. 183.

Endlich wenn man den Logarithmen einer Zahl sucht, welche über die Tafeln hinausgeht: so sucht man die Zahl durch die Theilung in kleinere zu zergliedern, deren Logarithmen darin befindlich sind. Dieser Logarithmen Summe ist der gesuchte.

Verlangt man z. B. den Logarithmen von 236472, welche Zahl mit 3 getheilt 78824 giebt, welche wiederum mit 8 getheilt 9853 giebt: so zählt man die Logarithmen von 3, von 8 und von 9853 zusammen. Ihre Summe 5. 3737798 ist der gesuchte Logarithme.

Findet aber keine dergleichen Theilung Statt: so läßt sich der Logarithme einer aus 5, 6 bis 7 Ziffern bestehenden Zahl auf die folgende Art, zur Ausübung genau genug, finden.

Man schneidet der Zahl zur Rechten so viel Ziffern ab, daß ihrer nur 4 übrig bleiben, die man in den Tafeln findet. Ihren Logarithmen zählt man von dem nächst größeren ab. Der dazu gehörigen Zahlen Unterschied ist eine 1 mit so vielen Nullen,

Nullen, als man Ziffern abgeschnitten hat. Alsdenn schließt man: wie der Unterschied der Zahlen zu den abgeschnittenen Ziffern, so der Unterschied der Logarithmen zu dem, was dem kleineren zuzuzählen ist, welches man also durch die Regeldetri findet. Die Kennziffer wird um 1 kleiner als die Anzahl der ganzen Ziffern, welche die Zahl enthält. (§. 172.)

Z. B. Die Zahl sei 2865243. Der Logarithme der 4 ersten Ziffern 2865 ist 3. 4571246; sein Unterschied von dem nächst größeren 1516; der Zahlen 2865000 und 2866000 Unterschied 1000. Also:

```
1000 — 243 — 1516
              243     Log. 2865 — 3. 5571246
             ————          Dazu — —      368
             4548                ———————————
            6064       Ges. Log. 3. 4571614
           3032
          ——————
    1000) 368388|368
```

Wäre die Zahl 28, 65243: so würde der Logarithme 1. 4571614. Wäre jene 2865, 243: so würde dieser 3. 4571614 und so in andern Fällen.

Ende der Rechenkunst.

Vor-

Vorübungen der Algebra.

Einleitung.

§. 1.

Die Algebra lehrt den Wehrt unbekannter Größen aus ihrem Zusammenhange mit andern bekannten erforschen; wozu sie sich theils der Gleichungen, theils verschiedener Zeichen bedient, welche dahin abzielen, daß sie diesen Zusammenhang, so kurz als deutlich, vor Augen legen.

§. 2.

Eine Gleichung ist der Ausdruck, wodurch die Gleichheit zwoer Größen angedeutet wird; welches durch Zwischensetzung dieses Zeichens (=) geschieht. Z. B. 3 Gld. = 2 Rthlr. bedeutet, daß 3 Gulden eben so viel ausmachen als 2 Thaler.

§. 3.

Die Größen selbst werden in der Algebra durch Buchstaben angedeutet, worunter man sich, wenn man will, Zahlen gedenken kann; als durch welche sich allerlei Größen ausdrücken lassen. (Rechenkunst §. 69.) Die bekannten Größen werden mehrentheils durch die ersten Buchstaben a, b, c u. s. f.; die unbekannten aber durch die letzten x, y u. s. f. angezeigt.

§. 4.

Unter den Größen kommen oft solche vor, die in einem der Absicht der Aufgabe entgegengesetzten

Sinne genommen werden, und im Gegensatze der andern (der bejaheten) verneinte Größen genannt werden. Als wenn jemand seine Casse durch Berechnung des Bestandes, der Ausgabe und der Einnahme untersuchen sollte, so wären der Bestand und die eingenommenen Posten bejahete, die ausgegebenen aber, als welche seine Casse nicht vermehren, sondern vermindern, verneinte Größen. Die bejaheten werden, wenn sie entweder im Anfange, oder allein, stehen, mit gar keinem, widrigenfalls mit diesem Zeichen (+) bemerkt; die verneinten aber mit diesem (—).

§. 5.

Da sich mit den algebraischen Größen solche Verrichtungen vornehmen lassen, die den arithmetischen ähnlich sind, so werden dieselben auch mit eben denen Nahmen belegt. Dieses veranlaßt eine besondere Art der Rechenkunst, welche man die Buchstabenrechnung zu nennen pflegt.

I. Buchstabenrechnung.

§. 6.

Die Zusammenzählung algebraischer Größen wird entweder blos angedeutet, oder auch ausgeführt. Das erstere geschieht durch Zwischensetzung dieses Zeichens (+), welches man durch mit * * zusammengenommen lesen kann.

Z. B. $(a + 2b) + (3a - 4b + c) + (-2a + 2b + d)$ zeigt an, daß die drei in Klammern geschlossene Größen zusammengenommen, als ein Ganzes, eine Summe, betrachtet werden sollen.

Wir

Wir schließen hier dasjenige, was als eine Größe angesehen wird, in Klammern ein, welches zu Vermeidung der Verwirrung auch in den andern Rechnungsarten nöthig ist. Auch zieht man an dessen Stelle bisweilen blos einen Strich über die zu einer Größe gehörigen Theile. Z. B. $\overline{3a - 4b + c}$.

Die Ausführung der Zusammenzählung besteht darin, daß man alle Theile der vorgegebenen Größen mit ihren Zeichen hinschreibt, und zur Abkürzung des Ausdruckes dasjenige, was sich eigentlich zusammenzählen läßt, in eine Summe bringt; was sich aber einander aufhebt, wegläßt.

$$\begin{array}{rrrrr} & a & +2b & & \\ & 3a & -4b & +c & \\ & -2a & +2b & & +d \\ \hline \text{Summa} & 2a & & +c & +d \end{array}$$

§. 7.

Die Abzählung einer Größe von der andern wird dadurch angedeutet, daß man vor die erstere dieses Zeichen (—) setzt, welches man durch weniger lesen kann.

Z. B. $(5a + b - 2c - d) - (a - 2b - 3c + d - e + f)$ zeigt an, daß die letztere der eingeklammerten Größen von der ersten weggenommen werden soll; es zeigt ihren Unterschied an.

Die Ausführung geschieht am leichtesten dadurch, daß man jedem Theile der abzuzählenden Größe das entgegengesetzte Zeichen (+ für — und — für +) vorsetzt, und das herauskommende der andern Größe zuzählt.

S. Das angeführte Exempel.

$$\begin{array}{rl} & 5a + b - 2c - d \\ & -a + 2b + 3c - d + e - f \\ \hline \text{Unterſch.} & 4a + 3b + c - 2d - e - f \end{array}$$

Daß eine bejahete Größe mit dem Zeichen (—) hingeſchrieben, und wo möglich, würklich abgezählt werden müße, iſt vor ſich klar. Daß aber eine verneinte mit dem Zeichen (+) bezeichnet, und wo möglich, zugezählt werden müſſe, erkennt man daraus, weil man nicht die ganze Größe, ſondern eine, die um die verneinte Theile kleiner war, abzählen ſollte; daher man durch Zuzählung dieſer letzteren das zu viel weggenommene erſetzen muß. Z. B. Wer von 12 Thl. 7 Rthlr. weniger 8 Gr. ausgegeben, behält 5 Rthlr. und 8 Gr.

§. 8.

Die Vervielfältigung wird angedeutet, entweder dadurch, daß man die Größen blos neben einander hinſchreibt; oder daß man einen Punkt; oder dieſes Zeichen ($\times$), welches man mahl leſen kann, darzwiſchen ſetzt.

Z. B. 3 a mit b vervielfältiget, ſchreibt man 3 a b, 3 a. b oder 3 a $\times$ b. Ferner (a + b — c) mit (a — b) ſo: (a + b — c) $\times$ (a — b), oder (a + b — c) (a — b), oder $\overline{a + b - c} \times \overline{a - b}$.

§. 9.

Die Ausführung der Vervielfältigung erfordert, wenn jede Größe nur aus einem Theile (Gliede) beſteht, weiter nichts; außer daß wenn Zahlen dabei ſind, man dieſe beſonders zu vervielfältigen, und das Vielfache voran zu ſetzen pflegt. Z. B. $3a \times 4b = 12ab$. Auch ſchreibt man anſtatt aa lieber a^2; anſtatt aaa oder a^2a aber a^3;

anſtatt

anstatt $a^2 a^3$ schreibt man a^5, und so in ähnlichen Fällen.

Im ersteren Falle sind die Zahlen Vervielfältiger, im zweiten Dignitätszeiger, welches man sorgfältig zu unterscheiden hat.

Wenn aber eine von beiden Größen, oder gar alle beide aus mehreren Theilen bestehen: so erfordert die Ausführung, daß man jeden Theil der einen mit jedem Theile der andern besonders auf besagte Art vervielfältige, und alle Vielfache zusammenzähle.

In Ansehung der Zeichen (+ und —) gilt in der Vervielfältigung die Regel, daß gleiche Zeichen (+ mit + oder — mit —) im Vielfachen das Zeichen der bejaheten Größen (+); ungleiche aber (+ mit — oder — mit +) das Zeichen der verneinten (—) erfordere.

Erstes Exempel.

$$\begin{array}{lrrrr}
 & a & + b & - c & \\
\text{mit} & a & - b & & \\
\hline
 & a^2 & + ab & - ac & \\
 & & - ab & & - b^2 + bc \\
\hline
 & a^2 & & - ac & - b^2 + bc
\end{array}$$

Zweites Exempel.

$$\begin{array}{rrrrr}
a^2 & - ab & + b^2 & & \\
a^2 & + 2ab & - b^2 & & \\
\hline
a^4 & - a^3b & + a^2b^2 & & \\
 & + 2a^3b & - 2a^2b^2 & + 2ab^3 & \\
 & & - a^2b^2 & + ab^3 & - b^4 \\
\hline
a^4 & + a^3b & - 2a^2b^2 & + 3ab^3 & - b^4
\end{array}$$

§. 10.

1. Daß + mit + im Vielfachen auch + giebt, (daß z. B. $+a \times +a = +a^2$) hat keine Schwierigkeit.

M. S. hierbei überall daß 1ste Exempel.

2. Daß — durch + ein — geben muß, ($-c \times +a = -ac$) sieht man daraus. Man sollte nicht die ganze Größe a + b, sondern eine um c kleinere, mit a vervielfältigen, und hat also c so viel mahl

zu viel genommen, als man a + b genommen hat, nämlich a mahl. Man muß also a mahl c oder ac abzählen.

3. Daß + durch — ein — giebt ($+ a \times - b = - ab$), erkennt man daher; weil man das obere a nicht mit dem ganzen, sondern dem um b verkleinerten untern a vervielfältigen sollte. Man hat es also b mahl zu viel genommen, und muß zu dessen Ersetzung b mahl a oder ab abzählen.

4. Daß — durch — ein + giebt ($- b \times - c = + bc$), ist daraus klar. Nachdem man a + b — c, welches mit dem um b verkleinerten a vervielfältiget werden sollte, mit dem ganzen a vervielfältiget, und es folglich b mahl zu viel genommen hat, so müßte man es b mahl abziehen, d. i. man müßte ($a + b - c$) mit b vervielfältigen, und das herauskommende $ab + b^2 - bc$ von dem übrigen abzählen. Man zählt es daher mit entgegen gesetzten Zeichen (§. 7) zu.

5. Wenn die verneinten Größen entweder allein, oder im Anfange stehen, so setze man einen andern Buchstaben davor, und verrichte die Vervielfältigung; stelle sich aber hernach vor, welches bei einem nach Belieben gewählten Buchstaben allezeit frei steht, daß er nichts gelte, oder = 0 sei; so werden alle Vielfache, worin er vorkommt, ebenfalls = 0 werden, und das übrige wird wie N. 2. 3 und 4 ausfallen. Und will man endlich die Buchstaben durch bestimmte Zahlen erklären, und z. B. $a = 6$, $b = 2$, $c = 3$ gelten lassen, so wird man sich einen Erfahrungsbeweis verschaffen können.

§. 11.

Die Theilung wird angezeigt, entweder dadurch, daß man den Theiler unter die zu theilende Größe bruchweise schreibt, oder daß man ihn hinter jene mit Zwischensetzung dieses Zeichens (:) setzt, wiewohl dieses letzte mehr zu Bemerkung eines Verhältnisses gebraucht wird.

Z. B.

Z. B. $\frac{a+b-c}{a-b}$ oder $(a+b-c):(a-b)$ zeigt den Antheil von $\overline{a+b-c}$ durch $\overline{a-b}$ getheilt an.

Die Ausführung erfordert, daß man die Größe finde, welche, mit dem Theiler vervielfältiget, die zu theilende hervorbringt. Woraus man denn leicht merkt, daß auch hier die Regel gilt, daß gleiche Zeichen in dem Antheile $+$, ungleiche aber $-$ erfordern.

Wir begnügen uns übrigens hier mit dem Falle, da eine vollkommene Theilung Statt findet; obgleich die Theilung sonst auch oft mit Nutzen bis ins unendliche fortgesetzt werden kann.

§. 12.

Wenn der Theiler aus einem einzigen Gliede besteht: so erfordert die Ausführung der Theilung, daß man diesen aus der zu theilenden Größe wegschaffe, und das übrige mit gehörigen Zeichen in den Antheil setze, wobei man denn, wenn Zahlen mit vorkommen, an diesen die Theilung nach den gewöhnlichen Regeln verrichtet.

Z. B. $\frac{abc}{ac} = b$, $\frac{6a^2b}{-3a} = -2ab$, $\frac{-2ab^2}{-2ab} = +b$,

$$\frac{4ab - 2ac + 6ad}{2a} = 2b - c + 3d,$$

$$\frac{2a^3b + 3a^2b^2}{3ab} = \tfrac{2}{3}a^2 + ab.$$

Wenn aber beide Größen aus mehreren Gliedern bestehen, so ordnet man sie vorher nach einerlei Buchstaben, d. i. man ordnet beider Größen Glieder so, daß die höhern Dignitäten des nach Be-

Belieben erwählten Buchstaben voran gehen, und die geringeren nach der Ordnung folgen. Das übrige verrichtet man ungefähr wie mit Zahlen. Nämlich: man theilt das erste Glied mit dem ersten, vervielfältiget den ganzen Theiler mit dem Antheile, und zählt das Vielfache von der zu theilenden Größe ab, auf welche Art man fortfährt, bis von derselben nichts mehr übrig ist.

Wir enthalten uns Weitläuftigkeit zu vermeiden ausführlicherer Regeln, und begnügen uns damit, die gegebenen durch verschiedene Beispiele zu erläutern.

Man soll 1) $8bc - 5b^2 - 8ac + 3ab + 2a^2$ mit $a - b$, 2) $5ab - 9ac - 4b^2 + 12bc + 6a^2$ mit $2a - b + 3c$ 3) $a^3 + b^3$ mit $a + b$ theilen.

Alle diese Größen findet man unten nach dem Buchstaben a geordnet.

Theiler.

1) $2a^2 + 3ab - 8ac - 5b^2 + 8bc \mid a - b$

$-2a^2 + 2ab$ | Antheil: $2a + 5b - 8c$

$+5ab - 8ac - 5b^2 + 8bc$

$-5ab \quad + 5b^2$

$-8ac \quad + 8bc$

$+8ac \quad - 8bc$

2) $6a^2 + 5ab + 9ac - 4b^2 + 12bc \mid 2a - b + 3c$

$-6a^2 + 3ab - 9ac$ | $3a + 4b$

$+8ab \quad - 4b^2 + 12bc$

$-8ab \quad + 4b^2 - 12bc$

3) $a^3 \quad + \quad b^3 \mid a + b$

$-a^3 - a^2b$ | $a^2 - ab + b^2$

$-a^2b + b^3$

$+a^2b + ab^2$

$+ab^2 + b^3$

$-ab^2 - b^3$

§. 13.

§. 13.

Daß auch die Berechnung der Brüche (Rech. §. 43. — 63), imgleichen die mancherlei bei der Proportion vorkommenden Fälle (§. 82 — 113) bei den Buchstabengrößen Platz finden, ist leicht zu erachten. Da aber diese Rechnungen auf eben solchen Gründen, als bei den Zahlen, beruhen, so lassen sich die dortigen Regeln, auch ohne besondere Anwendung auf dieselben, leicht dabei brauchen. Nur merken wir noch an, daß wenn 4 Größen a, b, c, d proportional sind, man sie so zu schreiben pflegt:

$$a : b = c : d$$

welcher Bezeichnung Grund aus §. 11. klar ist.

§. 14.

Wenn e den Verhältnißzeiger (Exponenten) bedeutet: so kann man die obige Proportion, je nachdem a oder b größer ist, so vorstellen:

$$be : b = de : d \text{ oder } a : ae = c : ce.$$

woraus sich verschiedene Eigenschaften der Proportion herleiten lassen, unter denen wir nur die folgenden bemerken.

1) $ad = bc$ (Rech. §. 85.). Denn dieses ist entweder so viel, als $bed = bde$; oder $ace = aec$.

2) $a : c = b : d$. Denn dieses ist dem Ausdruck $be : de = b : d$ oder $a : c = ae : ce$ gleich zu halten, da im ersten Falle der Verhältnißzeiger $\frac{de}{be} = \frac{d}{b}$ und im zweiten $\frac{c}{a} = \frac{ce}{ae}$ (Rech. §. 43. und 83.)

II. Von einfachen Aufgaben.

§. 15.

Man soll die Zahl 100 in drei Theile theilen, wovon der zweite zweimahl so groß als der erste, der dritte aber halb so groß als beide zusammen, und noch um 10 größer sein soll.

Wenn man den ersten Theil wüßte, so würden die andern leicht zu finden sein. Man nenne den ersten mit einem willkührlichen Namen x; so weiß man, ohne noch den Wehrt dieses x zu kennen doch, daß der zweite Theil 2 x, der dritte aber (x + 2 x) halb und noch 10 darüber, das ist $\frac{3^x}{2} + 10$ enthalten muß. Die drei Theile werden also zusammen $x + 2x + \frac{3}{2}x + 10$ oder $3x + \frac{3}{2}x + 10$ ausmachen. Da aber dieselben zusammen auch die Zahl 100 betragen müssen, so erhält man die Gleichung:

$$3. x + \frac{3}{2} x + 10 = 100.$$

Man sieht leicht, daß wenn man die beiden Seiten der Gleichung mit 2 vervielfältigte, das doppelte einander eben so gleich als das einfache bleiben müßte, daß also $6 x + 3 x + 20 = 200$ sein würde, oder $9 x + 20 = 200$. Nähme man von beiden Seiten 20 weg, so würde die daher entstehende Gleichung $9 x = 200 - 20$, oder $9 x = 180$, eben so wahr als die vorige sein. Aber, da man nicht verlangt zu wissen, wie viel 9 x, sondern, wie viel x betrage, so theilt man beide Seiten mit 9 und

und erhält: $x = \frac{180}{9} = 20$. Man weiß also den ersten Theil.

Der zweite muß demnach 2×20 oder 40, und der dritte $\frac{20+40}{2} + 10$ oder $\frac{60}{2} + 10$ oder $30 + 10$, d. i. ebenfalls 40 ausmachen, welcher drei Theile 20, 40 und 40 Summe würklich 100 beträgt.

§. 16.

Ungeachtet diese Aufgabe wegen der darin vorkommenden bestimmten Zahlen mehr arithmetisch als algebraisch ist: so giebt sie doch zu Erläuterung derer Regeln, welche bei einer einfachen algebraischen Aufgabe zu beobachten sind, Anlaß. Sie zeigt nämlich, wie es dabei theils auf die Findung, theils die Auflösung einer Gleichung ankommt.

§. 17.

Zu Findung der Gleichung lassen sich nicht wohl besondere Regeln geben, da blos eine sorgfältige Ueberlegung der Bedingungen der Aufgabe dieselbe an die Hand geben muß. So fanden wir hier $3x + \frac{3}{2}x + 10 = 100$.

Aufgelöset wird die Gleichung, indem man ihr eine solche Gestalt giebt, daß die unbekannte Größe auf einer Seite derselben von Vervielfältigern und Theilern frei, ganz allein zu stehen kommt. So entstand hier: $x = 20$.

Man

Man setzte bei dieser Arbeit voraus, daß Gleiches zu Gleichem gezählt, davon abgezählt, damit vervielfältiget, oder getheilt auch allezeit Gleiches hervorbringt.

§. 18.

Die besondern Regeln der Auflösung sind folgende.

1. Wenn etwa die gefundene Gleichung die Form einer Proportion hat, so setzt man das Vielfache der äußersten Glieder dem Vielfachen der mittleren gleich.

2. Wenn ein Glied, in welchem die unbekannte Größe vorkommt, ein Bruch ist, so vervielfältigt man beide Seiten der Gleichung mit den Nenner desselben, und wenn mehrere solche Brüche vorkommen, nach und nach mit jedem Nenner. Bei dem Bruche selbst geschieht dieser Vervielfältigung, wie leicht zu erachten, durch bloße Aufhebung des Nenners ein Genüge.

So wurde hier wegen der $\frac{3}{2}$ x alles mit 2 vervielfältiget.

3. Alle Glieder, in welchen die unbekannte Größe, entweder allein, oder mit andern vervielfältiget, vorkommt, bringt man auf die eine Seite der Gleichung; indem man entweder sie selbst, oder die übrigen Glieder auf die andere Seite schafft. Man kann nämlich jedes Glied mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite setzen. Hatte es +, so geschieht es durch Abzählung; hatte es —, durch Zuzählung desselben auf beiden Seiten.

So wurden hier die 20 durch die Abzählung auf die andere Seite gebracht.

4. Durch die ganze Größe, womit die unbekannte vervielfältiget ist, theilt man beide Seiten der Gleichung, wobei man sich auf der Seite der bekannten Größen mehrentheils mit einer Anzeigung dieser Theilung begnügen muß.

Die Theilung geschahe hier mit 9.

5. Wie sich zum öftern einige Ausdrücke durch Einrichtung zusammengesetzter Größen (Rech. §. 60), durch Ausführung blos angezeigter Rechnungsarten, auch hinwiederum durch Zerlegung eines Vielfachen in seine Vervielfältiger, Aufhebung der Brüche u. dergl. bequemer einrichten lassen, lernt man am besten durch Uebung.

§. 19.

Algebraischer würde die obige Aufgabe lauten, wenn sie so vorgetragen würde:

Man soll eine Zahl a in drei Theile theilen, wovon der zweite n mahl so groß als der erste sein, der dritte aber $\frac{p}{q}$ von ihrer beider Summe, und noch b darüber enthalten soll.

Wenn der erste x ist, so ist der zweite nx, und der dritte $\frac{p}{q}(x + nx) + b$ oder $\frac{px + npx}{q} + b$ (Rech. §. 58.) und $x + nx + \frac{px + npx}{q} + b = a$

$$qx + nqx + px + npx + bq = aq \quad (\text{§. 18. N. 2.})$$
$$qx + nqx + px + npx = aq - bq \quad (\text{N. 3.})$$
$$x = \frac{aq - bq}{q + nq + p + np} \, (\text{N.4}) = \frac{(a-b) \times q}{(1+n) \times (q+p)} \, (\text{N.5})$$

§. 20.

So bald man eine Aufgabe algebraisch aufgelöset hat, so hat man eine Regel gefunden, um alle ähnliche Aufgaben mit Zahlen aufzulösen. Man darf nämlich in der letzten Formel ($x = **$) anstatt der Buchstaben nur diejenigen Zahlen setzen, welche in jedem besondern Falle ihren Wehrt ausmachen. Welche Erinnerung wir hier, ein für allemahl, machen, und durch das Beispiel der vorgehabten Aufgabe erläutern wollen.

1. Es sei $a = 100, b = 12, n = 10, p = 3, q = 5.$ So ist $x = \frac{(100 - 12) \times 5}{(1 + 10) \times (5 + 3)} = \frac{88 \times 5}{11 \times 8} = 5$ der 2te Theil $= 10 \times 5 = 50$; und der 3te $= \frac{3}{5} \times (5 + 50) + 12 = \frac{3 \times 55}{5} + 12 = 33 + 12 = 45.$
In der That machen 5, 50 und 45 zusammen 100 aus.

2. a sei $= 24, b = 30, n = 3, p = 1, q = 2$; so ist:
$$x = \frac{(24 - 30) \times 2}{(1 + 3) \times 3} = -\frac{12}{12} = -1.$$

Das — zeigt an, daß man das 1 in einem dem Sinne der Aufgabe entgegengesetzten Sinne (§. 4.) verstehen, und nicht von den 24 wegnehmen, sondern dazu legen müsse. Eben dieses gilt von dem 2ten Theile welcher — 3 wird. Der 3te wird $-2 + 30 = +28$. Dieser ist in der That um 30 größer als die halbe Summe der ersten -2, und alle drei -1 -3 und 28 machen zusammen 24 aus. Da der dritte Theil allein schon größer als die zu theilende Summe war,

war, und die Algebra keine Wiedersprüche möglich machen kann, so konnten freilich die ersten Theile nicht bejaht werden.

3. $a = 100$, $n = 2$, $p = 3$, $q = 4$; b aber $= -5$. Der dritte Theil soll um 5 kleiner werden, als $\frac{3}{4}$ von der Summe der andern; so ist:

$$x = \frac{100 - (-5) \times 4}{(1+2) \times (4+3)} = \frac{(100+5) \times 4}{3 \times 7} = \frac{420}{21} = 20.$$

Der zweite $2 \times 20 = 40$, und der dritte $\frac{3}{4} \times 60 - 5 = 45 - 5$ ebenfalls $= 40$, welche drei Theile wiederum 100 ausmachen.

Die Verwechselung des bejahten und verneinten Werthes bekannter Größen kann bei den algebraischen Aufgaben ebenfalls mit Vortheile gebraucht werden.

§. 21.

Ein anderer Vortheil, welchen die algebraische Auflösung einer Aufgabe gewähret, ist dieser, daß wenn man die unbekannte Größe als bekannt, und eine von den bekannten als unbekannt ansieht, hiermit die Aufgabe in eine ganz andere verwandelt: man sich dabei doch eben der Gleichung, zu Bestimmung des gesuchten bedienen kann.

Man lasse z. B. a, p, q, b eben die Bedeutung als vorher behalten, setze aber den ersten Theil x fest, und untersuche, wie vielmahl der zweite größer als der erste werden dürfe, damit der dritte $\frac{p}{q}$ von der Summe der ersten, und noch b darüber enthalten könne? n sei also die gesuchte Größe.

Man nehme §. 19. die Gleichung
$qx + nqx + px + npx = aq - bq$, so ist
$nqx + npx = aq - bq - qx - px$

$n =$

$$n = \frac{aq - bq - qx - px}{qx + px} = \frac{aq - bq}{qx + px} - \frac{qx + px}{qx + px}$$

$$n = \frac{(a - b)\,q}{(q + p)\,x} - 1$$

x sei wie (§. 20. N. 1.) $= 5$, und a, b, p, q behalten ihre dortigen Bedeutungen, so ist $n = \frac{88 \times 5}{8 \times 5} - 1 = 11 - 1$ also $n = 10$, wie am ang. Orte.

§. 22.

Zween Bothen reisen einander auf einem Wege von m Meilen entgegen, wovon der eine stündlich a, der andere b Meilen zurück legt. Wie weit kommt der erstere, bis sie einander begegnen?

Man wird leicht merken, daß diese Aufgabe mit der folgenden übereinkommt:

Zwo Zahlen zu finden, die sich unter einander verhalten $= a : b$, und zusammen die Zahl m ausmachen. Man sucht die erstere x, wodurch die andere $m - x$ zugleich bekannt wird.

$a : b = x : m - x$ daher $am - ax = bx$ (§. 18. N. 1.)

und zuletzt $x = \frac{am}{a + b}$

§. 23.

Ein Bothe, welcher stündlich a Meilen zurücklegt, wird einem andern, der schon m Meilen voraus hat, und stündlich b Meilen reiset, nachgesandt. Wie weit kommt jener, ehe er diesen einholt? Oder:

Zwo

Zwo Zahlen zu finden, welche sich unter einander verhalten $= a : b$, und welche um die Zahl m unterschieden sind.

Man sucht die größte x, wodurch die andere $x - m$ wird; und findet zuletzt $x = \frac{am}{a-b}$

§. 24.

Zwo Röhren, durch deren jede das Wasser beständig gleich stark läuft, gehen in ein Gefäß. Die eine allein kann es in a, die andere in b Stunden anfüllen. Wie viel Zeit wird zu dessen Anfüllung erfordert, wenn beide zugleich lauffen?

Die gesuchte Zahl Stunden sei $= x$. Die Röhre, welche das Gefäß in a Stunden füllen kann, giebt stündlich $\frac{1}{a}$ des Gefässes her, die andere $\frac{1}{b}$. In x Stunden füllet also die erstere $\frac{x}{a}$, die zweite $\frac{x}{b}$ desselben. Aber $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$ macht das Ganze aus, oder ist $= 1$. Daher zuletzt $x = \frac{ab}{b+a}$.

§. 25.

m Quart Wein zu a Groschen sollen mit anderm zu c Groschen aufgefüllet werden, damit das Quart auf einen mitleren Preis, b Groschen, komme. Wie viel Quart des letzteren braucht man hierzu?

Oder: m Mark a löthigen Silbers sollen durch einen Zusatz von c löthigem b löthig gemacht werden. Wie viel Mark des letzteren gehören dazu?

Mit Beziehung auf den ersteren Vortrag sei x die gesuchte Zahl Qt. Die vorhandenen m Qt. kosten ma Gr.; die aufzufüllenden xc Gr.; beide also (am + cx) Gr. Andrerseits wird der ganze Vorrath aus (m + x) Qt. bestehen, und zu b Gr. gerechnet (m + x) ⋊ b Gr. kosten. Also:

$$am + cx = (m + x)\,b \text{ und } x = \frac{(a - m) \times b}{b - c.}$$

Der zweite Fall gehört zu der so genannten Alligationsrechnung, und braucht keiner besondern Erklärung, so bald man weiß, was z. B. 12 löthiges Silber sei. M. S. auch unten. §. 29.

§. 26.

Wenn in einer Aufgabe zwo unbekannte Grössen vorkommen, so muß dieselbe auch zwo Gleichungen an die Hand geben, wenn dieselben bestimmt werden sollen. Man sieht leicht, daß man in einer Gleichung x + y = a, wie man sie auch wenden mag, keine von beiden Größen, x und y, anders, als durch die andere, das ist, daß man keine von beiden bestimmen kann. Diese zwo Gleichungen müssen die Bedingungen der Aufgabe an die Hand geben.

§. 27.

Ein Knabe A sagt zu dem andern B: Gieb mir a Nüsse; so habe ich p mahl so viel als du. Wenn du sie mir lieber gäbest, sagt B, so hätte ich eben so viele als du. Wie viel Nüsse hatte jeder?

Des A Zahl sei = x, des B seine = y; so erhält man die Gleichungen:

1. $x + a = p \times (y - a)$ 2. $y + a = x - a.$

§. 28.

Zur Auflösung solcher Gleichungen kann folgendes dienen:

1. Man sehe unter den gesuchten Größen nur die eine, welche man will, als die unbekannte an, und löse beide Gleichungen in dieser Rücksicht auf. (§. 18.)

So wird man im vorigen §. aus 1 erhalten
$x = py - pa - a$; aus 2 aber $y + 2a = x$.

2. Die beiden gefundenen Wehrte dieser einen unbekannten Größe setze man einander gleich, und löse die daher entstehende Gleichung auf; so wird man ihren Wehrt durch lauter bekannte Größen bestimmt erhalten.

Also: $py - pa - a = y + 2a$. Woraus man erhält $y = \frac{(p+3)a}{p-1}$

3. Diesen Wehrt setze man in eine der erstern Gleichungen, welche man will, an die Stelle dieser unbekannten Größe; so wird auch die andere völlig bestimmt.

In 2 (§. 27.) ist also:
$\frac{(p+3)a}{p-1} + a = x - a$ folglich
$\frac{(p+3)a}{p-1} + 2a = x$, welches (durch §. 18. N. 5.) verwandelt wird in $\frac{(3p+1) \times a}{p-1} = x$

§. 29.

Man soll aus zweien Fäßern Wein, aus deren einem das Quart a, aus dem andern

c Groschen kostet, p Quart abziehen, so daß jedes Quart auf einen mitleren Preis b Gr. komme. Wie viel muß aus jedem abgezogen werden?

Oder: Man soll von zwoen Massen Silber, wovon die eine a löthig, die andere c löthig ist, p Mark b löthigen Silbers nehmen. Wie viel nimmt man von jeder? M. S. (§. 25.)

Im ersteren Falle sei die Zahl der aus dem ersteren Fasse abzuziehenden Qt. $= x$, der aus dem andern $= y$; so ist 1) $x + y = p$. 2) $ax + cy = bp$. Also aus 1) $x = p - y$; aus 2) $x = \frac{bp - cy.}{a}$ Daher

$$p - y = \frac{by - cy.}{a} \text{ Wodurch man erhält}$$

$$\frac{(a-b)p}{a-c} = y. \text{ und } x = \frac{(b-c)p}{a-c}$$

§. 30.

Wenn in einer Aufgabe drei oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, so gehören zu deren Bestimmung auch eben so viele Gleichungen. Drückt man nun den Wehrt der einen unbekannten Größe durch alle drei (wir schränken uns auf diesen Fall ein) Gleichungen aus, und setzt diese Wehrte einander gleich: so erhält man drei Gleichungen mit zwoen unbekannten Größen, unter welchen Gleichungen man zwo nach Belieben wählt, um beider Größen Wehrt (nach §. 28.) zu bestimmen. Wenn diese Wehrte in eine der ersten Gleichungen gesetzt werden, so wird dadurch auch die dritte Größe durch lauter bekannte Größen bestimmt. Die Furcht der Weitläuftigkeit in blossen Vorübungen der

Al-

Algebra erlaubt uns nicht dieses durch Beispiele zu erläutern.

III. Von den Quadratischen Aufgaben.

§. 31.

In den bisherigen Aufgaben kam nie das Quadrat, oder eine höhere Dignität der unbekannten Größe, auch kein Vielfaches derselben mit einer andern unbekannten Größe vor. Dergleichen Aufgaben, sowohl als die Gleichungen, welche sie an die Hand geben, werden einfache genannt.

§. 32.

Kommt aber in einer Gleichung das Quadrat (ohne höhere Dignitäten) der unbekannten Größe, auch kein Vielfaches zwoer unbekannten vor: so heißt sie eine Quadratische Gleichung, oder eine Gleichung vom 2ten Grade; und zwar eine Reine, wenn die unbekannte Größe außer ihrem Quadrate nicht vorkommt (z. B. $x^2 = ab$); widrigenfalls eine Unreine. (z. B. $x^2 - ax = ab$).

§. 33.

Man merkt leicht, daß es bei Auflösung solcher Gleichungen auf die Ausziehung der Quadratwurzel ankommt, daher wir hier noch einiges die Buchstabengrößen betreffende nachholen wollen. Wie eine Größe auf ihr Quadrat erhoben werde, ist aus Rech. §. 128. vergl. mit Alg. §. 9. bekannt. Das Zeichen der auszuziehenden Wurzel ist dieses ($\sqrt{}$). Z. B. $\sqrt{ab}$ bedeutet die Quadratwurzel von ab.

§. 34.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Größe von einem einzigen Gliede hat keine Schwierigkeit. Man theilt den Dignitätszeiger mit 2 und nimmt das herauskommende für die Wurzel (§. 9.), oder läßt, wenn dieses nicht angeht, das Wurzelzeichen davor stehen. Z. B. $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{a^6} = a^3$. $\sqrt{ab}$ bleibt $\sqrt{ab}$. Doch merkt man leicht, daß die Quadratwurzel eines Vielfachen dem Vielfachen ihrer Wurzeln gleich ist. Z. B. $\sqrt{a^4 b^2} = a^2 b$. $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$. Ferner daß die Quadratwurzel eines Bruches einem Bruche gleich ist, dessen Zähler und Nenner der ersteren Wurzeln sind. Z. B. $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$, $\sqrt{\frac{ab}{c^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{c}$.

In allen drei Fällen kann man der Wurzel nach Belieben + oder — vorsetzen, wenn dieses nicht durch besondere Umstände bestimmt wird.

Welche Bemerkungen nach unser jetzigen Absicht hinreichend sind.

§. 35.

Um aus mehrtheiligen Quadraten die Wurzel ziehen zu lernen, thut man, wie bei Zahlen, wohl, wenn man das Gegentheil dieser Verrichtung, nämlich die Erhebung einer mehrtheiligen Wurzel auf ihr Quadrat vorangehen läßt, und auf die Entstehung desselben Achtung giebt. Der Versuch giebt folgende Sätze, deren Einkleidung in Worte wir dem Leser überlassen.

1. $(a+b)^2$ oder $(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2$ oder $(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a \pm b + c)^2 = (a \pm b)^2 + 2(a \pm b)c + c^2$

4. $(a \pm b - c)^2 = (a \pm b)^2 - 2(a \pm b)c + c^2$

Es wäre überflüßig hierin weiter zu gehen, da man beständig den (Rech. §. 132. 133.) in Ansehung der Zahlen geschehenen Beobachtungen ähnliche machen wird, in Ansehung der Zeichen + und — aber sich leicht aus §. 9. helfen kann.

§. 36.

Hierauf beruhet die folgende Regel, um aus einer würklich Quadratischen Größe die Wurzel auszuziehen:

1. Man ordne die Größe nach einem Buchstaben.

2. Aus dem ersten Gliede ziehe man (nach §. 34.) die Wurzel, welche nach Belieben mit + oder — genommen, den ersten Theil der gesuchten Wurzel ausmacht. Ihr Quadrat ziehe man von der vorgegebenen Größe ab.

3. Den gefundenen Theil der Wurzel verdoppele man, theile mit dem herauskommenden das folgende Glied, und schreibe den Antheil als den folgenden Theil der Wurzel hin.

4. Diesen vervielfältige man sowohl mit dem Theiler, als mit sich selbst, und ziehe das herauskommende von der vorgegebenen Größe ab.

5. Wenn von dieser noch etwas übrig ist, so wiederhole man die dritte und vierte Verrichtung so lange, bis nichts mehr da ist. Wobei man N. 3. alles bis dahin gefundene zu verstehen hat.

1stes Ex. Man sucht $\sqrt{(b^2-2ac+2ab+c^2+a^2-2bc)}$

Wurzel $a+b-c$

$a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2$

$-a^2$

$+2ab-2ac+b^2$

$2a)\ -2ab \qquad -b^2$

$-2ac-2bc+c^2$

$2a+2b)\ +2ac+2bc-c^2$

2tes Ex. Man sucht $\sqrt{(a^4+4b^4+8ab^3-4a^3b)}$

Wurzel $a^2-2ab-2b^2$

$a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4$

$-a^4$

$-4a^3b+8ab^3$

$2a^2)+4a^3b-4a^2b^2$

$2a^2-4ab)\ -4a^2b^2+8ab^3+4b^4$

$+4a^2b^2-8ab^3-4b^4$

§. 37.

Eine verneinte Größe von einem Gliede kann gar keine Quadratwurzel haben, weil so wohl — mit —, als + mit + vervielfältiget, ein + geben. Man nennet daher Größen von dieser Gestalt $\sqrt{-a^2}$ oder $a\sqrt{-1}$ u. dergl. unmögliche Grössen. Sie entstehen, wenn man in einer Aufgabe unmögliche Bedingungen vorausgesetzt hat. Ihre Betrachtung aber ist nicht ohne Nutzen.

§. 38.

Die Auflösung einer reinen Quadratischen Gleichung hat wenig Schwierigkeit.

1) Hat das Quadrat der unbekannten Größe einen oder mehrere Vervielfältiger, so befreiet man

es

es davon, indem man die ganze Gleichung damit theilt.

2) Ist es verneint, so macht man es durch Versetzung auf die andere Seite bejaht, und schafft alles übrige von dieser Seite weg.

3) Alsdenn zieht man die Wurzel auf beiden Seiten aus, oder wenn dieses auf der Seite der bekannten Größen nicht angeht, begnügt man sich daselbst mit Vorsetzung des Wurzelzeichens.

4) Bisweilen kann man bei der Wurzel beide Zeichen $\pm$ brauchen; wo nicht, so wählt man dasjenige, welches der Absicht der Aufgabe das gemäßeste ist.

§. 39.

Die Bewohner einer Stadt sind in vier Jahrhunderten von a tausend auf b tausend angewachsen. Vorausgesetzt, daß ihre Vermehrung der Zeiten proportional erfolgt sei, soll man sagen, wie viel ihrer zu Ende des ersten Jahrhunderts gewesen sein?

Man sieht leicht, daß es darauf ankommt, zwischen a tausend und b tausend, oder nur zwischen a und b drei stete Proportionalgrößen zu finden. Wenn man nun die erste als die eigentlich gesuchte x nennet, so wird (weil $a : x = x : \frac{x^2}{a}$, und $a : x = \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2}$, endlich $a : x = \frac{x^3}{a^2} : \frac{x^4}{a^3}$) das $\frac{x^2}{a}$ die zweite, $\frac{x^3}{a^2}$ die dritte, und $\frac{x^4}{a^3}$ dem b selbst gleich

sein. Hieraus erhält man sogleich $x^4 = a^3 b$. Folglich $x^2 = \pm \sqrt{a^3 b}$ (§. 38.) oder $x^2 = \pm a\sqrt{ab}$ (§. 34.) und $x = \pm \sqrt{\pm (a\sqrt{ab})}$. Die Wurzeln $\pm \sqrt{-a}$ u. s. f. sind unmöglich (§. 37.) und $-\sqrt{(a\sqrt{ab})}$ der Absicht nicht gemäß; also $x = \sqrt{(a\sqrt{ab})}$.

Es sei $a = 16$, $b = 81$; so ist $x = \sqrt{(16\sqrt{16 \times 81})} = \sqrt{(16 \times 4 \times 9)}$ (§. 34.) $= 4 \times 2 \times 3 = 24$.

§. 40.

In einer unreinen Quadratischen Gleichung (§. 32.) befindet sich das Quadrat der unbekannten Größe nebst ihrem Vielfachen mit bekannten Größen. Da aber ein vollständiges Quadrat auch ein Quadrat des zweiten Theiles der Wurzel erfordert (§. 35.) so muß man auf die Ersetzung des fehlenden bei Auflösung solcher Gleichungen bedacht sein.

§. 41.

Ueberhaupt kommt es dabei auf folgende Verrichtungen an: (die Gleichung sei $b^2 = ax - mx^2$)

1. Wenn das Quadrat der unbekannten Größe Vervielfältiger hat, so befreiet man es davon.

$$\frac{b^2}{m} = \frac{ax}{m} - x^2.$$

2. Auch sieht man dahin, daß es bejaht sei, oder gemacht werde. $x^2 + \frac{b^2}{m} = \frac{ax}{m}$.

3. Alle Vielfache der unbekannten Größe schafft man auf die Seite der Gleichung, wo ihr Quadrat steht;

steht; alles übrige hingegen auf die andere Seite.

$$x^2 - \frac{ax}{m} = - \frac{b^2}{m}.$$

4. Von dem Vervielfältiger der unbekannten Größe, er mag aus einem oder mehrern Gliedern bestehen, nimmt man die Hälfte, vervielfältiget sie mit sich selbst, und zählt ihr Quadrat beiden Seiten der Gleichung zu.

$$x^2 - \frac{ax}{m} + \frac{1}{4}\frac{a^2}{m^2} = \frac{1}{4}\frac{a^2}{m^2} - \frac{b^2}{m}$$

5. Alsdenn zieht man auf beiden Seiten die Wurzel aus, oder begnügt sich auf der Seite der bekannten Größen mit Vorsetzung des Zeichens $\pm\sqrt{}$.

$$x - \frac{1}{2}\frac{a}{m} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{m^2} - \frac{b^2}{m}\right)}$$

6. Endlich schafft man den bekannten Theil der Wurzel von der andern Seite auch hieher.

$$x = \frac{1}{2}\frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{m^2} - \frac{b^2}{m}\right)}$$

§. 42.

Man soll zwo Zahlen finden, welche zusammen die Zahl s ausmachen, und zwischen die Zahlen a und b gesetzt, mit ihnen eine Proportion abgeben.

Wenn man die eine x nennet, so wird die andere $s - x$. Folglich $a : x = s - x : b$; daher denn

$ab = sx - x^2$. (§. 18). Also (§. 41. N. 2. 3.)

$$x^2 - sx = -ab$$

Zugez. $\frac{1}{4}s^2 = \frac{1}{4}s^2$ N. 4.

$$x^2 - sx + \frac{1}{4}s^2 = \frac{1}{4}s^2 - ab$$

$$x - \frac{1}{2}s = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}s^2 - ab)} \text{ N. 5.}$$

$$x = \frac{1}{2}s \pm\sqrt{(\frac{1}{4}s^2 - ab)} \text{ N. 6.}$$

Durch Anwendung des doppelten Zeichens $\pm$ erhält man hier beide Zahlen zugleich. Denn wenn man die zweite besonders sucht, so erhält man ebenfalls nichts anders als $\frac{1}{2}s \mp \sqrt{(\frac{1}{4}s^2 - ab)}$, so daß blos $\pm$ in $\mp$ verändert wird.

1) Es sei $a = 4$, $b = 12$, $s = 14$; so ist: $x = 7 \pm\sqrt{(49 - 48)} = 7 \pm 1$, wodurch die Zahlen 8 und 6 angewiesen werden, welche zusammen 14 ausmachen, und so beschaffen sind, daß $4 : 8 = 6 : 12$.

2) a und b bleiben, s aber sei $= 10$, so ist: $x = 5 \pm\sqrt{(25 - 48} = 5 \pm\sqrt{-23}$. Solche Zahlen sind daher unmöglich.

§. 43.

Zwo Zahlen zu finden, deren eine um d größer sei als die andere, und welche ebenfalls, zwischen a und b gesetzt, eine Proportion geben.

Ist

Ist die eine x, so ist die andere $x + d$ und $a : x = x + d : b$ daher $ab = x^2 + dx$.

Also $x = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + ab)}$
a sei $= 2$, $b = 15$, $d = 7$; so ist:

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(\frac{49}{4} + 30)} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = -\frac{7}{2} + \frac{13}{2}$$

Das + giebt $x = 3$, daher denn $x + d = 10$.

Das — giebt $x = -10$, und $x + d = -3$

Beides findet Statt; denn

$2 : 3 = 10 : 15$ und $2 : -10 = -3 : 15$.

§. 44.

Ein Vater macht zwischen seinen drei Söhnen folgende Erbtheilung: der älteste soll p weniger als der mitlere haben; und des ältesten Erbtheil soll sich zu des mitleren seinem verhalten, wie dieses zu der ganzen Verlassenschaft. Alles übrige soll dem jüngsten zufallen.

Da sich nun die Verlassenschaft = a findet, so frägt sich, wie viel jedem zukomme?

Des ältesten Erbtheil sei x; so ist:

$x : x + b = x + b : a$ und $ax = x^2 + 2bx + b^2$. Folglich $-b^2 = x^2 + 2bx - ax$. Wenn man nun von beiden Seiten $b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2$ als das Quadrat von $b - \frac{1}{2}a$ zuzählet, und nach §. 41. weiter

ter verfährt, so erhält man $x = \frac{1}{2}a - b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - ab.)}$

a sei = 50000 Rthlr., b = 12000 Rthlr. oder Kürze halber a = 50, b = 12 so ist:

$x = 25 - 12 \pm \sqrt{(625 - 600)} = 13 \pm 5$, entweder 18 oder 8.

Im ersten Falle ist also das Erbtheil des zweiten = 18 + 12 = 30, und des dritten seines 50 — 18 — 30 = 2.

Im zweiten ist des zweiten Erbtheil = 8 + 12 = 20, und des dritten seines = 50 — 8 — 20 = 22.

Es ist aber so wohl 18 : 30 = 30 : 50 als 8 : 20 = 20 : 50. Folglich ist das Testament zweideutig.

Ende.

Druckfehler,

die den Sinn stören könnten, sind folgende:

Seite 25 ist in dem 3ten Ex. unter dem ersten Striche der allgemeine Nenner 18 ausgelassen.
— 68 Zeile 5 soll das (,) nach Vielfaches weggelassen, und dagegen sowohl nach 5te, als Z. 6 nach aber eines gesetzt werden.

Die übrigen, welche man angemerkt, sind:

S. 4 Z. 8 vom Ende

		anstatt	orduen	lese man	ordnen
— 6	— 21	—	gezähl	—	gezählt
— 8	— 19	—	heiß	—	heißt
— —	— 24	—	insbesonde	—	insbesondere
— —	— 30	—	Ziffer	—	Ziffern
— 10	— 30	—	verhergehenden	—	vorhergehenden
— 12	— 1	—	dte	—	die
— 22	— 7	—	vem	—	dem
— —	— 8	—	giebte	—	giebt
— 23	— 22	—	zu	—	zum
— —	— 30	—	die die	—	die
— 34	— 27	—	25	—	24
— 36	— 16	—	abzuzählender	—	abzuzählenden
— 55	— 12	—	Auffaßes	—	Auffatzes
— 57	— 18	—	findet	—	finden
— 65	— 1	fehlt bei der Ueberschrift des Abschnittes die Zahl II.			
— 68	— 30	—	verrielfältiget	—	vervielfältiget
— 69	— 3	—	noch noch	—	noch
— 83	— 22	—	daß	—	das
— 93	— 12	—	§. 183.	—	§. 182.
— 97	— 6	—	woz	—	wozu

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rouyer, Franz Konrad

Anfangsgründe der Rechenkunst nebst Vorübungen der Algebra

Berlin 1778

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 738
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267678-8
VD18 12532738-001